Zur Reform

des

Rechenunterrichtes

in den

Volksschulen

von

Rudolf Knilling.

Zweite Abteilung.

Fortsetzung und Schluß des theoretischen Teiles.
Beschreibung des Rechentisches, Teillineals und verbesserten Zweisatzes.
Praktischer Teil.

München.
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler.
1886.

E. Mühlthaler, Kgl. Hof-Buchdruckerei, München.

Inhaltsverzeichnis.

Fortsetzung und Schluß des theoretischen Teiles.

II. Abschnitt. Zählen und Rechnen.

III. Abschnitt. Teilen und Enthaltensein.

Praktischer Teil.

II. Abschnitt.

Zählen und Rechnen.

1. Kapitel.

Das Zählen.

Worin sich Zählen und Rechnen von einander unterscheiden.

Zählen und Rechnen wurden bis jetzt häufig mit einander verwechselt. So sprechen unsere neueren und neuesten Methodiker von einem Fingerrechnen, Strichrechnen, Rechnen an der Zählmaschine, während sie doch nur das Zählen, also das Fingerzählen, Strichzählen &c. darunter meinen können. Ich halte es darum für meine erste und nächste Aufgabe, klarzulegen, worin sich Zählen und Rechnen von einander unterscheiden.

Das Rechnen hat das Zählen zur Grundlage. Es erwächst aus dem Zählen. Es geht aber doch weit über dasselbe hinaus und hilft Resultate ermitteln, welche durch bloßes Zählen entweder gar nicht oder nur sehr langsam, mühsam und unsicher gefunden werden könnten. Welcher enorme Zeitaufwand würde erfordert, um das 23fache von 2 365 427 durch das Zählen von Punkten, Strichen u. dgl. herauszubekommen! Wer vermöchte eine Billion wirklich abzuzählen, wer das Zwei-, Drei-, Hundertfache einer Billion durch Zählen zu ermitteln? Und doch sind wir imstande, noch mit weit höheren Zahlen als Billionen mit größter Sicherheit zu operieren und selbst die Ergebnisse der Trillionen von Trillionen und Quadrillionen von Quadrillionen auf das genaueste und in verhältnismäßig kurzer Zeit zu bestimmen.

Wie vermag das Rechnen das alles zu leisten, wie vermag dasselbe Zahlen zu finden, welche durch bloßes Zählen, auch wenn dasselbe Jahrtausende anhielte, gar nie erhalten werden könnten?

Worin beruht die Verlässigkeit und Genauigkeit des Rechnens, eine Verlässigkeit, welche dem Zählen nicht im entferntesten anhaftet? Was läßt uns endlich die größten Zahlresultate, welche selbst Septillionen und Oktillionen übersteigen dürfen, durch das Rechnen in so kurzer Zeit, ja nach wenigen Sekunden oder Minuten gewinnen?

Antwort: Es sind zwei Hilfsmittel, durch welche das Rechnen so Erstaunliches zu bewirken vermag. Das eine ist das Einmaleins. Dasselbe muß aber von dem Rechner vollständig beherrscht werden, es muß zu seinem verlässigen, geistigen Eigentum geworden sein. Das andere ist die Zerlegung der Zahlbezeichnungen in ihre dekadischen Bestandteile (Einer, Zehner, Hunderter ꝛc.). — Aus diesen beiden Dingen setzt sich das Rechnen zusammen. Es besteht also einesteils in einem Zerfällen der Zahlen (resp. der Zahlnamen und Ziffern) in Einer, Zehner, Hunderter, anderenteils im Übertragen und Anwenden des kleinen Einmaleins auf die genannten dekadischen Bestandstücke.

Das Einmaleins gehört noch ganz dem Zählen an, es ist hervorgegangen aus dem Zählen, es ist allein verständlich und ist allein zu beweisen durch das Zählen. Aber bei seiner Anwendung im Rechnen wird es zu einem Mittel, auch die Resultate der größten Zahlen mit einer Sicherheit und Genauigkeit zu bestimmen, welche mit nichts verglichen, durch nichts erreicht oder übertroffen werden kann. Das Einmaleins bildet die Brücke, den Übergang vom Zählen zum Rechnen. Obwohl noch selbst dem Gebiete des Zählens angehörend und dessen Boden entsprossen, führt es in Vereinigung mit dem dekadischen Zerlegen weit über das durch das bloße Zählen Erreichbare hinaus zu Größenbestimmungen, für welche uns jeder Maßstab fehlt.

Diesen allgemeinen Erörterungen, durch welche ich die eigentümliche Natur des Rechnens flüchtig gezeichnet habe, will ich noch einige speziellere Bemerkungen anfügen, welche die charakteristischen Unterschiede, die zwischen ihm und dem Zählen bestehen, noch klarer darthun sollen. — Also!

1. Das Zählen kann sich nur an Sinnendingen mit Erfolg bethätigen. Ein rein innerliches oder geistiges Zählen, ein Zählen ohne jede sinnliche Grundlage oder Handhabe, ein Zählen im bloßen Vorstellen gibt es nicht. Das Rechnen dagegen bedarf keiner solchen Handhabe, es vollzieht sich sogar in der Regel bei Abwesenheit jeder sinnlichen Wahrnehmung oder Anschauung und schreitet lediglich fort am Leitfaden der Zahlnamen und Ziffern.

2. Das Zählen hat ein enges Gebiet. Billionen z. B. können nicht mehr wirklich abgezählt werden. Dem Rechnen aber sind keine Schranken gesetzt. Es vermag seinen Zahlraum beliebig zu erweitern, ja ins Unendliche auszudehnen.

3. Das Zählen ist ein ziemlich einfacher Vorgang. Das Rechnen erscheint, damit verglichen, als kompliziert. Es setzt sich aus zwei grundverschiedenen Operationen zusammen, nämlich

a) aus dem Zerfällen, (Auflösen) der Zahlbezeichnung in ihre dekadischen Bestandstücke und

b) aus dem Besinnen auf die memorierten und vom Gedächtnisse festgehaltenen Ergebnisse des Einmaleins und dem gleichzeitigen Anwenden derselben auf die Zehner rc.

4. Es gibt Ergebnisse, welche *nur durch Zählen* gefunden werden können. Zu diesen gehören sämtliche Resultate des kleinen Einmaleins. Um zu erfahren, daß $9 + 5 = 14$, $13 - 6 = 7$, $3 \times 4 = 12$ u. s. w. ist, mußte man ursprünglich zählen. Andere Ergebnisse dagegen vermögen wir *nur durch Rechnen* zu ermitteln. Daß z. B. $3 \times 4\,000\,000 = 12\,000\,000$ sind, dieses Resultat wird nicht durch Abzählen der Millionen, sondern dadurch gewonnen, daß wir die simple Wahrheit „$3 \times 4 = 12$“, welche uns vom Einmaleins her bekannt ist, auf die Millionen übertragen, schließend, wie 3×4 Einer $= 12$ Einer sind, ebenso müssen auch 3×4 Millionen $= 12$ Millionen sein. In diesem Vorgange aber besteht das Rechnen. — Manche Aufgaben endlich können *sowohl durch Zählen als auch durch Rechnen* gelöst werden. So vermag ich z. B. die Thatsache, daß $3 \times 402 = 1206$ ist, dadurch zu ermitteln, daß ich dreimal 402 Striche zeichne und dann durchzähle; es wäre dies die Lösung durch Zählen. Ungleich rascher und sicherer werde ich jedoch zum Ziele kommen, wenn ich die Zahlbezeichnung 402 in 4 Hunderter und 2 Einer zerlege und darauf das Einmaleins verwende, sprechend: 3×4hundert ist 12hundert, 3×2 ist 6, also ist $3 \times 402 =$ zwölfhundertsechs oder eintausendzweihundertsechs; und das ist die Resultatermittlung durch Rechnen. An unserem Beispiele zeigt sich klar, daß die Lösung durch Rechnung um vieles leichter und kürzer ist, als jene durch Zählen, und daß es unnütze Kraft- und Zeitvergeudung wäre, wenn man ein Ergebnis, das man berechnen kann, erst mühsam durch Zählen finden wollte.

Was das Zählen ist.

1. Das Zählen ist ein sinnlicher Akt. Es kann nur an Sinnendingen, an Konkretis vollzogen werden. Wir zählen Striche, Punkte, die wir auf dem Papier fixiert haben, aber nie bloß gedachte Striche oder gedachte Punkte. Ein Zählen im bloßen Vorstellen, also ohne Zuhilfenahme eines sinnlichen Mittels, wie Finger, Kugeln an der Zählmaschine rc., ist einfach unmöglich. Das Ableiern der Zahlnamen in ihrer Reihenfolge oder das sogenannte Numerieren, wie es die alte Schule geübt hat, verdient nicht als ein „Zählen“ bezeichnet zu werden.

2. Das Zählen ist ein Thun mit den Dingen und an denselben. Es besteht in dem Herausgreifen eines einzelnen Gegenstandes aus der gegebenen Gruppe oder Menge und dem Hinzufügen eines zweiten, zu welchem dann der dritte, vierte u. s. w. gelegt wird. Beim Zählen verrücken wir entweder die Dinge, oder wir verlassen unsern Standpunkt und gehen längs derselben hin, oder wir bewegen zum mindesten das Auge von einem zum anderen. Das alles aber ist ein sinnliches Thun, ein physischer Vorgang.

3. Das Zählen schreitet fort an einer Reihe von Akten. Ich hole Eines aus der gegebenen Menge heraus und füge dem ein Zweites hinzu; das ist der erste Vorgang. Ich reihe der dadurch erhaltenen Summe eine weitere Einheit an; darin besteht der zweite Akt, und fahre auf diese Weise so lange fort, bis ich nichts mehr hinzuzufügen habe, d. h. bis die gegebene Menge erschöpft ist.

4. Das Thun beim Zählen ist ein völlig klares, verständliches. Es beginnt mit der einfachsten Zusammensetzung, nämlich der Eins und Eins; zu der Zwei fügt es wieder Eins, so wird auch die Drei verständlich, aus dieser die Vier, die Fünf, die Sechs u. s. w. Zu bemerken ist nun, daß, je mehr die Reihe anwächst, desto verschwommener und unbestimmter die bereits abgezählte Menge vor dem Geistesauge wird. Von der 13 z. B. habe ich keine wirkliche deutliche Vorstellung mehr. Vollständig klar ist mir in jedem einzelnen Zählakt nur das Hinzufügen der Eins zu der zuletzt erhaltenen Summe, nicht aber die Zahl, zu welcher hinzugethan wird. Dessenungeachtet kann ich unmöglich an der Verlässigkeit des Zählens zweifeln. Ich vermag zwar in der That nur einen ganz kleinen Zahlenraum wirklich und vollständig zu überschauen. Aber indem ich die zu zählende Menge durch successives Hinzufügen von Eins zur Eins gleichsam erst entstehen lasse, bin ich gewiß, daß im letzten Ergebnis alle vorausgegangenen Zählresultate und darum auch alle vorhandenen Einheiten oder Einsen mit enthalten sind. Die Klarheit beim Zählvorgang verschiebt sich. Sie verweilt anfänglich bei dem ersten Akt (Eins zu Eins) und verbreitet sich sodann über den zweiten (Eins zu Zwei), trägt sich von dem auf den dritten über (Eins zu Drei) u. s. f. Wenn ich bei dem letzten Resultate angekommen bin, sehe ich zwar, ähnlich wie bei der Ersteigung eines Turmes oder einer Pyramide, die einzelnen Stufen nicht mehr deutlich, die mich heraufgeführt haben, aber ich weiß, daß ich keine Stufe, keine Einheit übersprungen habe, daß eine jede von ihnen von mir zurückgelegt werden mußte, daß jede einzelne Eins mir während des Zählens einmal klar bewußt war und daß eine jede in die Zahlbeziehung oder richtiger in den Zählvorgang mit aufgenommen worden ist.

In einem dunklen Gange hängt Bild an Bild. Ich durchwandle ihn mit einem Licht in der Hand. Während das eine Bild in Nacht

verschwindet, taucht das andere vor meinem Blicke auf. Sie alle zugleich anzuschauen und mit einemmale zu erfassen, ist mir unmöglich. Wenn ich aber am Ende des Ganges angelangt bin, habe ich dennoch alle gesehen, freilich nur eines nach dem andern. Ähnlich verhält es sich beim Zählen. Ich kann nur wenige Einsen deutlich neben einander vorstellen oder in Gedanken auf einander beziehen; aber was mir nicht auf einmal möglich ist, das gelingt mir durch eine Mehrheit von Akten.

5. Die einzelnen Einsen, die wir im Zählen erfassen, müssen aber auch in die Zahlbezeichnung mit aufgenommen werden, sonst bliebe dasselbe ergebnislos. Nehmen wir an, irgend jemand, dem die Kenntnis unserer Zahlbezeichnungen (d. i. Zahlnamen und Ziffern) vollständig mangelte, würde Eins zu Eins fügen, darauf wieder Eins hinzusetzen u. s. w., so würde in ihm ohne Zweifel die Vorstellung des successiven Anwachsens der Zahl aufdämmern, ferner würde er zu der Einsicht kommen, daß die vorausgehende Zahl immer um Eins kleiner ist, als die nachfolgende und umgekehrt jede nachfolgende um Eins größer als die ihr vorausgegangene, es wäre ihm klar das Aufbauen der Zahl durch fortgesetztes Hinzufügen von Einsen, d. i. der Zählvorgang. Sein Zählen bliebe aber dessenungeachtet fruchtlos, denn nur einen ganz engen Zahlenraum vermag er in der Vorstellung wirklich zu beherrschen. Größere Reihen oder Gruppen können, so lange er sich nicht der Worte oder Ziffern zu ihrer Unterscheidung bedient, von seinem Denken nicht mehr bemeistert werden. — Das bloße Hinzufügen von Eins zu Eins &c. ohne Anwendung der Zahlbezeichnung führt also, wie gesagt, noch zu keinem Resultat. Ich werde nach einem derartigen Manipulieren ebensowenig wie vorher angeben können, wie groß die Zahl ist, noch um wie viel sie sich von dieser oder jener anderen Menge unterscheidet, noch, ob sie sich inzwischen verändert hat oder nicht.

6. Das für das Zählen Entscheidende und allein Wertvolle liegt daher in der Zahlbezeichnung. Ich gebe jeder Ansammlung, von Eins angefangen, einen besonderen Namen, ich präge mir die Reihenfolge dieser Namen ein und setze mich dadurch erst in den Stand, mit Nutzen zu zählen, die abgezählte Zahl später als dieselbe wieder zu erkennen, sowie von jeder anderen zu unterscheiden. Ist einmal die Reihe der Zahlnamen dem Gedächtnis unverlierbar einverleibt, so macht sich das Zählen von selbst. Man braucht dann, wenn die Anzahl irgend welcher gegebener Dinge (Kugeln, Stäbchen, Punkte &c.) ermittelt werden soll, nur seine Zunge laufen zu lassen und beim Aussprechen der einzelnen Wörter einen Gegenstand nach dem andern mit der Hand zu berühren (resp. zu verschieben) oder mit dem Auge zu verfolgen. Ist man am Ende der Reihe angelangt, d. h. hat man keinen Gegenstand mehr zu verrücken, zu betasten u. dgl., so

gebietet man seiner Zunge Stillstand. Das zuletzt gesprochene Wort ist dann der Name für die vorhandene Anzahl.

7. Während des Zählvorganges hat der Zählende keine andere Vorstellung als die des successiven Anwachsens der Reihe um je Eins. Nach demselben läßt er vielleicht sein Auge noch einmal über die abgezählte Menge hinstreifen und erhält dadurch den Eindruck des unbestimmten Vielen. Die Zahlvorstellung wird also auch durch Zählen zu keiner deutlicheren, klareren, bestimmteren. Der Zählvorgang löst zwar die unbestimmte, vage, verschwommene Mengevorstellung in eine Reihe sonnenklarer Einzeln- oder Partialvorstellungen, nämlich in Eins und Eins und Eins 2c. auf. Aber da sich diese Partialvorstellungen nicht wiederum in eine völlig klare Totalvorstellung fassen lassen, so ist unser Mengebegriff nach dem Zählen noch ebenso unbestimmt als er vor demselben war.

Mit seltenem Scharfsinn hat John Locke die Wichtigkeit der Zahlbezeichnung für das Rechnen nachgewiesen.*) Er war der erste, der eingesehen hat, daß wir nur so weit zu zählen, resp. zu rechnen vermögen, als unser Vorrat an Zahlnamen reicht. Nur darin irrte er, daß er glaubte, die Zahlbezeichnung mache die Zahlvorstellung selbst bestimmter, klarer, deutlicher. Seine wichtige Entdeckung, nach welcher der Schwerpunkt des Zählens und Rechnens in der Namengebung ruht, da wir ja die Mengen und Größen nur mittelst der Zahlzeichen (Namen und Ziffern) klar zu unterscheiden vermögen, fand indes bis zur Stunde bedauerlicherweise nur wenig Beachtung.

8. Das Zählen ist im letzten Grunde ein Erfahren.

Wenn ich sage: Das sind zwölf Gegenstände, so heißt dies mit anderen Worten: ich bin bei dem Herausgreifen und Hinzufügen der einzelnen Einheiten und dem gleichzeitigen Aussprechen der Zahlenreihe bis zu dem Namen „Zwölf“ gekommen, oder auch: ich habe erfahren, daß sich die real gegebene Menge bei diesem Worte erschöpft.

Aus der bloßen Anschauung einer Menge kann ich noch nicht beurteilen, ob sie 12 oder mehr oder weniger als 12 beträgt. Nicht nach Maßgabe des in der Anschauung Enthaltenen wird der Zahlname gewählt, er wird vielmehr erst gesucht und gefunden durch die Zählerfahrung.

Zur weiteren Charakterisierung der Zählerfahrung sei noch Folgendes bemerkt:

a) Diese Erfahrung eilt auf jeder Stufe, die wir im Zählen zurücklegen, der Namengebung voraus. Ich bringe Eins zu Fünf und spreche dann erst: Sechs! — nicht eher.

---

*) s. Locke's „Versuch 2c.“, übers. und erläutert von J. H. v. Kirchmann (Berlin 1872), 2. Band, S. 215.

b) Wie jede Erfahrung etwas Selbständiges und von uns Unabhängiges, also etwas ankündigt, auf das wir keinen eigentlichen Einfluß auszuüben vermögen, so auch die Erfahrung durch Zählen. — Ich zähle eine gegebene Menge von Dingen und erhalte die Bezeichnung 13. So oft ich diese Anzahl nachzähle, immer werde ich bei dem Worte 13 anlangen. Aber auch jeder andere muß zu diesem Ergebnisse kommen. Denn das Resultat ist hier abhängig von der realen, an sich seienden Menge der betreffenden Dinge und so lange diese sich nicht ändert, muß auch selbstverständlich das Zählen immer zu dem gleichen Ergebnisse führen.

c) Die Zahl ist jederzeit an sich bestimmt. Eine Menge von 13 Gegenständen unterscheidet sich auf das genaueste von der Anzahl 12. Dieser Unterschied ist aber nicht in unserer, vom Zählen unabhängigen Anschauung oder Vorstellung der 13 und 12 enthalten, zum mindesten tritt er hier nicht deutlich genug hervor. Davon kann sich jeder leicht überzeugen, der eine gegebene Menge von Punkten u. dgl. aus dem bloßen Eindruck, den dieselbe auf sein Auge macht, zu schätzen versucht. Die an sich seiende Bestimmtheit der Mengen nun auch für das Denken zur Unterscheidung zu bringen, das ist die Aufgabe der Zählerfahrung oder kurzweg des Zählens und in der Lösung dieser Aufgabe allein beruht seine hohe, unschätzbare Bedeutung.

9. J. H. von Kirchmann sagt in einer Anmerkung zu Locke: „Die Namen können bei Zahlen nicht mehr bewirken, als bei jeder anderen Vorstellung. Die Vorstellungen selbst können sie in keinem Falle ersetzen; diese müssen schon vollständig und klar in der Seele bestehen; der Name kann nur zu ihrer Bezeichnung im Denken und bei Mitteilung an andere benützt werden. Deshalb kann man die Vorstellungen von 1 bis 9 und weiter haben; auch wenn man noch kein Wort oder Zeichen dafür hat, und das Zählen ist von diesen Worten und Zeichen nicht abhängig.“*)

Diese Deduktion, wornach die Zahl*bezeichnung* nur eine ganz untergeordnete und unwichtige Rolle zu spielen hätte, ist plausibel, sie ist zwingend für jeden, dem das tiefere Verständnis der eigentümlichen Natur des Zählens noch nicht aufgegangen ist; — uns aber vermag sie nicht zu überzeugen.

J. H. v. Kirchmann hätte recht, wenn die Zahlnamen für die *Zahlvorstellungen* stünden. Nun aber werden sie nicht eigentlich für unsere *Vorstellungen* der Mengen gebraucht, sondern für die Zahlen *an sich*, für die Zahlen, *wie sie unabhängig von unserem Denken* bestehen, für die *konkreten* Größen, für jene in den Dingen selbst begründeten quantitativen Unterschiede, die wir

---

*) J. H. von Kirchmann: „Erläuterungen zu Locke rc.“, 1. Teil, Berlin 1873, Seite 94.

nicht eigentlich anschauen, die wir nur erfahren können durch Zählen. — Das Problem: Inwiefern kann die Zahlbezeichnung die Zahlvorstellung an Bestimmtheit, Klarheit, Genauigkeit übertreffen? ist von uns vollständig gelöst. Die einer gegebenen Menge angemessene Bezeichnung wird erhalten durch Zählen. Das Zählen ist ein Erfahren und zwar ein Erfahren der seienden Größenbestimmtheit. Unsere Anschauungen und Vorstellungen von den Zahlen sind zu unvollkommen, zu vag, zu verschwommen, als daß sich in ihnen jene kleinsten Differenzen, durch welche sich die Mengen von einander unterscheiden, völlig klar ausprägen könnten. Was aber der Zahlvorstellung nicht gelingt, das bewerkstelligt das Zählen, indem es von Eins ab jeder denkbaren Menge einen besonderen Namen gibt und es dadurch dem Denken ermöglicht, den kleinsten Zahlenunterschied, nämlich jenen um eine Eins oder Einheit zu erkennen.

Ich muß es nochmals wiederholen: Das Zählen ist im letzten Grunde ein Erfahren und die Zahlnamen stehen nicht für unsere rohen, verschwommenen Vorstellungen, sondern für die an sich seienden Größenunterschiede, welche wir nicht mit dem bloßen Auge zu erfassen, sondern uns eben nur durch Zählen zu erschließen vermögen. Unsere Zahlbezeichnungen (Namen und Ziffern) sind ungleich genauer als unsere Zahlvorstellungen.

Wozu das Zählen führt.

Alles Zählen führt zu bestimmten Zahlnamen, Zahlbezeichnungen und zu nichts weiter. Bloße Wortklänge, Namen sind sein Ergebnis.

Wenn ich jene Anzahl Geldstücke zähle und dadurch erfahre, daß es 35 sind, so wird mein Wissen nur bereichert durch das Wort „fünfunddreißig". Ich erhalte nur den Namen für die betreffende Zahl, aber weder eine klarere Vorstellung derselben noch sonst irgend eine neue Einsicht. Und wenn ich zufällig die Bezeichnung 35 vergessen sollte, so weiß ich von jener Anzahl Geldstücke genau so viel, als ich vor dem Zählen wußte. Es ist dies ein Beweis, daß das eigentliche Ergebnis des Zählens nur in der Ermittlung eines Namens, eines Wortes besteht, und daß deshalb das Zählen nur dadurch einen Wert erhält, daß man sich die gefundene Bezeichnung merkt. Wer eine Menge zu hundertenmalen durchzählt, aber sobald er damit zu Ende ist, immer sogleich wieder das letzte Wort, das Resultat vergißt, der unterzieht sich einer fruchtlosen Arbeit; sein Zählen macht ihn um nichts klüger.

Diese Thatsache ist für die Rechenmethode von größter Wichtigkeit. Denn es geht aus derselben hervor, daß es nicht genügt, das Einmaleins, wie es von unseren modernen Rechenlehrerern beliebt wird, bloß zum Verständnis zu bringen, d. h. durch Zählen finden

zu lassen. So lange die einzelnen Ergebnisse immer wieder vergessen werden, so lange war alle Mühe umsonst, so lange hat der Schüler — nichts. Nur durch Memorieren wird das Einmaleins zu seinem geistigen Eigentume. Die Worte müssen gemerkt werden, denn ohne Bezeichnung durch Worte sind unsere Zahlvorstellungen samt und sonders haltlos, sind sie zerplatzende Seifenblasen, sind sie Schemen, die, kaum flüchtig wahrgenommen, gleich wieder in blauen Dunst verfließen. — Diese Einsicht hat seither gemangelt und darum hat man auch die Wichtigkeit und Unerläßlichkeit des wörtlichen Memorierens der Einmaleinstabellen nicht klar erkannt.

Ich kann den Namen einer Blume vergessen und doch ein deutliches Bild von derselben haben, so daß ich sie in ihren allgemeinsten Umrissen zeichnen, nach Farbe, Gestalt, Größe ꝛc. genau beschreiben könnte und, sobald sie mir unterkommen würde, sie wieder zu erkennen, sowie von jeder anderen Blüte zu unterscheiden vermöchte. Der Name scheint hier etwas Unwesentliches und Unwichtiges zu sein, da die Sache auch ohne denselben festgehalten werden kann. Völlig anders verhält es sich bei den Zahlen. Wenn es mir entfallen sein sollte, daß jenes Häuflein Münzen aus 35 Stücken besteht, d. h. wenn ich den N a m e n, das W o r t „fünfunddreißig" vergessen haben sollte, so wäre ich

1) nicht imstande, für jene Menge die ihr entsprechende Anzahl von Punkten u. dgl. zu setzen; ich könnte sie also nicht nachzeichnen oder nachbilden;

2) vermöchte ich das Häuflein Geldstücke, wenn es mir später wieder zu Gesicht kommen würde, nicht sicher als dasselbe zu erkennen; ich könnte unmöglich angeben, ob es sich inzwischen vermehrt oder vermindert hat oder ob es sich gleich geblieben ist;

3) würde ich es endlich auch nicht von einer andern ähnlichen, also um einige Stücke größeren oder kleineren Anzahl unterscheiden können.

Das Ergebnis des Zählens ist immer nur ein Name, ein Wort, nichts weiter. Aber dem Zahlnamen ist eine unendlich wichtige Funktion zugeteilt. Er hat uns die bestimmte klare Vorstellung der Mengen zu ersetzen. Wird der Name vergessen, so geht auch damit die Zahl, geht alles verloren und das Denken besitzt dann nichts mehr, woran es sich halten, woran es den Kalkül fortspinnen könnte. Denn (es mag paradox klingen, aber es muß gesagt werden) die Zahlbezeichnung (der Name oder die Ziffer) allein ist der wahre und eigentliche Gegenstand des Rechnens.

Wichtigkeit und Bewunderungswürdigkeit des Zählens.

Alle Größenunterscheidung beruht in letzter Instanz auf dem Zählen. Nur durch das Zählen wird uns die Zahl erreichbar. Die Aufschlüsse, welche uns die Arithmetik über die Eigenschaften und den

Inhalt der Zahlen erteilt, konnten von ihr ursprünglich allein durch Zählen geschöpft werden. Der Zählakt ist die Grundlage, das Fundament, die Basis dieser reichen, vielumfassenden Wissenschaft. Raubt dem Menschen das Vermögen zu zählen und ihr raubt ihm damit die Fähigkeit, die Größen zu erkennen und zu unterscheiden, ihr raubt ihm die Fähigkeit, zu rechnen.

Das Zählen läßt uns Unterschiede in den Mengen der Dinge erkennen, wo der Gesichtssinn keinen entdeckt. Es hilft hinüber über eine wesentliche Lücke unseres Auffassungs- und Unterscheidungsvermögens. Es macht das vagste, verschwommenste Vorstellungsgebiet zum exaktesten und evidentesten.

Wir haben im Zählvorgang einen der genialsten Kunstgriffe des Menschengeistes anzustaunen. Denn er macht das scheinbar Unmöglichste möglich; er gestattet dem Denken auch da noch mit einer unvergleichlichen Sicherheit und Verlässigkeit zu operieren, wo jede deutliche Vorstellung fehlt; er führt, ohne daß es einer besonderen Geistesanstrengung dazu bedürfte, zur Entdeckung der seienden Größenunterschiede und läßt die Dinge durch sich selbst ihre Menge, ihre Anzahl bekunden.

Das Zählen gehört zu den raffiniertesten Hilfsmitteln, welche je ersonnen worden sind. Es darf, was seine Tragweite und eminente Zweckmäßigkeit anbelangt, den größten Erfindungen und Entdeckungen aller Jahrtausende gleich gestellt werden. Ohne das Mittel des Zählens gäbe es kein Rechnen, kein Schätzen und Abwägen der Naturkörper und Naturkräfte, keine eingehende Erforschung der Naturgesetze, keine Physik, keine Astronomie, ja nicht einmal ein besonnenes, berechnendes Wirken und Schaffen, wie es zur Ausübung des gemeinsten Handwerkes erfordert wird.

---

2. Kapitel.

Das Zahlensystem.

Es ist unmöglich, für jede Zahl ein eigenes Wort zu bilden. Darum begnügte sich die Sprache, nur wenigen Mengen, nämlich den Zahlen 1 bis 12, sowie der Hundert, Tausend, Million, Billion, Trillion 2c. besondere Namen zu geben, die Bezeichnungen für alle übrigen aber aus diesen wenigen einfachen Wörtern zu kombinieren. So setzt sie bereits die Mehrfachen der „Zehn“, also „zwanzig, dreißig 2c.“ aus zwei Numeralen, nämlich aus den Wörtern „zwei, drei 2c.“ und der Silbe „zig“, einer Sproßform von „zehn“ zusammen.

Der Mensch ist noch nie methodischer verfahren, als indem er den Zahlen ihre Namen zuteilte. Mit nur anderthalb Dutzend besonderen Lauten vermag er die größten Mengen, welche selbst Billionen und Trillionen übersteigen dürfen, zu benennen. Wir haben hier die unvergleichlichste Oekonomie, die weiseste Sparsamkeit zu bewundern. Vielleicht nirgends wurde die möglichste Ausbeutung eines so beschränkten Materials ernstlicher versucht und erfolgreicher durchgesetzt als gerade auf dem Zahlengebiete. Doch leitete den Menschen dabei sicher nicht Ueberlegung, sondern eine mehr unbewußte, irgendwelchen äußeren oder inneren Anregungen und Hemmnissen folgende Notwendigkeit. Daß er z. B. die Zehn zur Grundlage und Richtschnur seines Zahlbezeichnungssystems machte, dazu gaben jedenfalls die Finger die Veranlassung. Man bediente sich derselben wohl lange als Zahlzeichen; dann erfand man besondere Namen für sie; mit dem Abzählen des letzten Fingers war eine Gruppe beendet; die nächstfolgende Zahl (11) erhielt den Namen der ganzen Gruppe (d. i. der beiden Hände) und einer Einheit u. s. f. Auch heutzutage zählen noch einzelne wilde Volksstämme auf diese Weise (S. Büchner's Kraft und Stoff). — Spracharmut und Bequemlichkeit ließen dem Menschen sodann alle möglichen Kombinationen der wenigen vorhandenen Zahlwörter erschöpfen, ehe er eine völlig neue Bezeichnung, also den Namen Hundert oder Tausend oder Million, ersann. Was nur das subtilste und raffinierteste Denken zustande gebracht hätte, das bewirkte in diesem Falle der Hang am Gewohnten und der Mangel an unterscheidenden Worten.

Noch bewundernswerter ist die Zifferschrift. Wie sie zweifelsohne etwas viel Späteres ist als die Bezeichnung der Zahlen mittelst Namen, so bekundet sich in ihr auch mehr die besonnene Ueberlegung, der mit Bewußtsein gestaltende Verstand. Während jene für die höheren Gruppen (hundert, tausend ꝛc.) besondere Wörter bildete, deutet diese die Hunderter, Tausender ꝛc. nur durch die Stelle an, welche sie ihnen zur Null oder irgend einer anderen Ziffer anweist. Die Zifferschrift basiert sonach in ihrer charakteristischen Eigentümlichkeit auf der Entdeckung, daß man den Wert eines Zeichens ganz gut von der räumlichen Anordnung, d. i. von der Stelle, die es zu anderen einnimmt, abhängig machen kann.

Und nun: Was ist das Zahlensystem? — Nichts, als eine bestimmte Methode, Zahlbezeichnungen zu bilden, resp. zu sprechen und zu schreiben; aber keineswegs, wie man allgemein glaubt, die Art und Weise, unter welcher wir uns die Menge vergegenwärtigen und zurechtlegen. Die Dekadik hat mit unseren Größenvorstellungen nicht das geringste zu schaffen. Wenn wir von 345 Personen, von 1200 Häusern, von 167 Schiffen ꝛc. sprechen, so denken wir dabei

an keinerlei Gruppierung, wenigstens nicht an die dekadische. Unsere Zahlvorstellungen sind meist einfach, d. h. sie sind die Vorstellung einer einzigen, ungeteilten Menge oder Reihe. Nur die Bezeichnung ist kombiniert. Die Dekadik haftet allein der Namengebung und Zifferschrift an; sie gewinnt jedoch keinen Einfluß auf unser Vorstellen und Denken. Ich werde dies an einem Beispiele kurz erläutern. — Der Franzose gebraucht vier Wörter, um die 99 auszudrücken, nämlich „quatre-vingt-dix-neuf“, während er beim Schreiben nur zwei Ziffern für diese Zahl setzt. Würde nun die Kombination der Zahlzeichen auch eine besondere Gruppierung der Zahlvorstellung andeuten oder mit anderen Worten, wären unsere Mengebegriffe genau so zusammengesetzt, wie deren sprachliche oder schriftliche Bezeichnung, so müßte der Franzose beim Aussprechen der „quatre-vingt-dix-neuf“ etwas anderes denken, als beim Erblicken der Ziffer „99“. Das einemal würden ihm 4 Gruppen von je 20 (quatre-vingt), eine Gruppe aus 10 gebildet (dix) und neun Einzelne (neuf) vorschweben; das anderemal würde er sich im Geiste 9 Gruppen von je 10 und 9 Einzelne, der Zifferschreibung entsprechend, einbilden. Weil nun dies sicher nicht der Fall ist, der Franzose sich vielmehr bei der sprachlichen Bezeichnung der 99 ebenso viel oder richtiger ebenso wenig denkt, wie bei der schriftlichen, so haben wir darin einen Beweis, daß die besondere Zusammensetzung (Kombination) der Zahlzeichen (Namen oder Ziffern) die Mengevorstellung als solche nicht im geringsten alteriert.

Außer dem dekadischen Zahlensysteme, wären zwar noch viele andere wie das dyadische, duodekadische 2c. 2c. denkbar. Nachdem aber, wie wir gesehen haben, das Zahlensystem nur auf die Bezeichnung und keineswegs auch auf die Vorstellung entscheidenden Einfluß gewinnen kann, nachdem es sonach in dieser Beziehung offenbar etwas mehr Aeußerliches und Unwesentliches ist, so muß es als Spielerei erklärt werden, wenn man sich mit solchen möglichen Systemen, dem Beispiele unseres großen Leibnitz oder unseres, zwar weniger hervorragenden, aber von seinem Schülerhäuflein desto schwärmerischer verehrten Philosophen Kraußе folgend, eingehend zu beschäftigen sucht, als eine Spielerei, die nie und nimmer zu wichtigen Aufschlüssen über die wahre Natur der Zahlen führen wird.

Trotz seiner Äußerlichkeit hat jedoch das Zahlensystem für uns die größte und unschätzbarste Bedeutung. Es ermöglicht uns:

1) mittelst weniger besonderer Namen oder Zeichen sämtliche Mengen, die größten wie die kleinsten, auszudrücken,

2) die ganze Reihenfolge der Zahlen leicht zu behalten; es wiederholen sich ja beständig dieselben Bezeichnungen in allen höheren Reihen und zwar in der gleichen Aufeinanderfolge;

3) das Verhältnis, in welchem jede einzelne Zahl zur Zehn, Hundert, Tausend u. s. w. steht, auf den ersten Blick zu erkennen. Dieser Umstand wäre, für sich betrachtet, von geringer Bedeutung. Denn was mich bei einer Menge am meisten interessiert, ist: wie groß ist sie, wie viele Eins enthält sie? und nicht: in wie viel mal Zehn läßt sie sich zerlegen? Aber es wird dadurch unendlich wichtig, daß es uns

4) das Rechnen ermöglicht. Und das ist wohl der größte und bemerkenswerteste Vorteil, der uns aus dem Zahlensystem erwächst Ohne ein solches gäbe es wohl ein Zählen, vielleicht auch ein Einprägen der gefundenen Zählergebnisse, aber kein Rechnen. Jedes besondere Größenresultat müßte wieder eigens und für sich durch Zählen gesucht werden. Es wären so viele Zahlen durchzuzählen, als durch das Leben Aufgaben gestellt würden, also unendlich viele. Und manches Ergebnis könnte trotz des größten Zeit- und Kraftaufwandes doch nie ermittelt werden. Die Dekadik nun reduziert die durch das Zählen nothwendig zu beschaffenden Resultate auf eine verhältnismäßig geringe Anzahl, nämlich auf die Ergebnisse des sogenannten kleinen Einmaleins und setzt uns in den Stand, mittelst dieser wenigen Sätzchen, welche vom Gedächtnis leicht behalten werden können, jede arithmetische Aufgabe leicht, rasch und sicher zu lösen.

Die Spracharmut unserer Vorfahren, welche sie daran hinderte, mehr als etwa einem Dutzend Zahlen besondere Namen zu geben, muß nach dem allen als ein höchst glücklicher Umstand bezeichnet werden, da wir sonst schwerlich zu einem Zahlensystem und darum noch weniger zum Rechnen gekommen sein würden.

---

3. Kapitel.

Das Rechnen.

Die eigentümliche Natur des Rechnens.

Beim Rechnen findet ein dekadisches Zerlegen der Zahlen oder richtiger der Zahlbezeichnungen statt, ein Zerlegen in Bestandstücke, welche die konkrete Menge (die Zahl an sich) nicht ausgeschieden enthält, welche insofern nur gedacht, nur eingebildet sind.

Das Rechnen ist, wie das Zählen, ein merkwürdiger, ein bewundernswerter Kunstgriff. Ausgehend von den in der Außenwelt gegebenen Zahlen und Zahlenveränderungen führt es durch Mittel und Wege zum Resultat, welche vom Menschengeiste erfunden sind und ihm ausschließlich angehören. Das Rechnen begreift Zerlegungen und Operationen in sich, die in der konkreten Welt, in der Welt der

äußeren sinnlichen Wahrnehmung kein Gegenbild haben, welche nicht im geringsten den realen Vorgängen ähneln, welche sich vollständig unterscheiden von der Art und Weise, wie Natur die Mengen entstehen läßt, — und dennoch stimmen unsere Rechenergebnisse haarscharf mit dem jeweiligen Resultate der sich außer uns wirklich vollziehenden Größenwandlung überein.

Wir wollen diese Behauptungen an einem einfachen Rechenexempel klar machen.

Aufgabe: Zu 527 Personen kamen noch 236, wie viel waren es jetzt? — Lösung: Vor allem zerlege ich die beiden gegebenen Zahlen in Hunderter, Zehner und Einer. Diesem Zahlenzerfällen aber entspricht nichts Reales in der Erscheinungswelt. Die Personen stehen nicht in Gruppen von je 100, je 10 beisammen. Ich nehme also im Rechnen eine Zerlegung der Mengen vor, welche in Wirklichkeit nicht statt hat. — Darauf werde ich die Einer zu Einer, die Zehner zu Zehner, die Hunderter zu Hunderter addieren, d. h. ich werde zuerst die 6 Personen zu den 7 Personen, dann die 30 zu den 20 und endlich die 200 zu den 500 zählen. Das ist wiederum ein Vorgang, der nur im Denken stattfindet und zu dem wir in der Außenwelt nichts Korrespondierendes nachweisen können. Denn es ist ganz und gar unglaublich, daß eine Menge von 763 so zusammengekommen wäre, daß zuerst zu 7 Personen 6 getreten sind, dann zu den 20 die 30, zu den 500 die 200. Dies könnte nur mit Absicht und durch das künstlichste Arrangement bewerkstelligt werden.

Worauf beruht nun die Verläßigkeit und Evidenz des Rechnens? Antwort: Darauf, daß 1) die arithmetischen Operationen und Zerlegungen, wenn sie auch keine realen Vorgänge und keine wirklichen Gruppierungen genau nachahmen, wenn sie also in gewissem Sinne gleich willkürlich und subjektiv sind, so doch wenigstens mögliche Vorgänge und mögliche Gruppierungen anzeigen und 2) daß wir es im Rechnen mit denselben Quantitäten zu thun haben, wie die Außenwelt und daß wir dabei verbinden und trennen, vermehren und vermindern, wenn die Größen außer uns verbunden und getrennt, vermehrt und vermindert werden, daß wir uns also nach dem real gegebenen Größenbestand und seinen thatsächlichen Veränderungen richten. J e d e m S t ü c k d e r Z a h l b e z e i c h n u n g e n t s p r i c h t a u c h e i n S t ü c k d e r S a c h e (d e r k o n k r e t e n M e n g e) u n d e b e n s o j e d e m a r i t h m e t i s c h e n A d d i t i o n s - u n d S u b t r a k t i o n s a k t, a l s o e t w a d e r A d d i t i o n d e r E i n e r z u d e n E i n e r n o d e r j e n e r d e r Z e h n e r z u d e n Z e h n e r n e i n T e i l o d e r S t ü c k d e s r e a l e n V o r g a n g e s. U n d a l l e T e i l e o d e r S t ü c k e, i n w e l c h e w i r b e i m R e c h n e n d i e G r ö ß e n s o w o h l a l s d i e O p e r a t i o n e n (A d d i t i o n, S u b t r a k t i o n ꝛc.) z e r f ä l l e n, e r g e b e n e b e n

zusammengenommen das Ganze, welches sich von der wirklichen Menge, von dem außer uns realisierten Quantum nicht wesentlich unterscheiden kann.

Wir wollen den Schüler in das volle Verständnis der arithmetischen Operationen einführen. Wir wollen darum das dekadische Zerlegen, welches ja die Basis aller Rechenvorgänge ist und ohne welches die letzteren nicht wirklich begriffen werden könnten, an Sachen, an konkreten Dingen veranschaulichen, so daß es nichts rein Ideelles und Gedankliches bleibt, sondern zu etwas Sinnenfälligem, Greifbaren wird. Wir wollen irgend welche konkrete Gegenstände in Gruppen von je 10, je 100 bringen und an ihnen die wichtigsten Rechenoperationen vornehmen. Nur so wird jedem Schüler, dem schwächsten wie dem talentiertesten, die Dekadik und damit auch das Rechnen verständlich. Welche Sache würde sich aber zu diesem Zwecke besser eignen als unsere Münzen? An welchen Gegenständen ließen sich das Zahlensystem und die möglichen Rechenvorgänge schöner, leichter und natürlicher verdeutlichen, als gerade an unseren Pfennigen, Zehnpfennigen und Markstücken? — Hervorragende Methodiker des vorigen Jahrhunderts (Overberg, Trappe, Busse,) versinnbildlichten die Zehner, Hunderter, Tausender durch Hölzchen, welche sie in Bündel brachten oder auch durch Düten, Säckchen und Kästen. Es läßt sich nicht leugnen, daß diese Veranschaulichungsmittel in ihrer Art etwas Vorzügliches waren. Aber Bündchen, Düten, Säckchen und Kästen sind dennoch im Vergleich zu unseren Münzen unpraktische, unnatürliche, gemachte und erkünstelte Lehrgegenstände. Greifen wir darum in Zukunft, so oft wir unsern Kindern das Wesen des Zahlensystems und des Rechnens zum Verständnis zu bringen suchen, zu unsern gebräuchlichsten Münzsorten und seien wir überzeugt, daß kein Rechenmethodiker ein besseres, zweckmäßigeres, einfacheres und natürlicheres Lehrmittel zu erfinden vermag.

Kopf- und Zifferrechnen.

Das eine ist so mechanisch wie das andere. Wenn man daher das mündliche oder Kopfrechnen häufig als ungleich geistbildender bezeichnet und dem schriftlichen oder Zifferrechnen weit vorgezogen hat, so geschah das auf Grund einer leicht erklärlichen Täuschung. In Wahrheit aber besteht kein wesentlicher und durchgreifender Unterschied zwischen beiden Rechenformen. Denn alles Rechnen, gleich nun ob es im Kopfe oder auf dem Papiere vollzogen wird, kann sich nur in einem mehr oder weniger gedankenlosen Zerlegen der Zahlbezeichnungen in Einer, Zehner, Hunderter 2c., sowie im Besinnen auf die auswendig gelernten Resultate des kleinen Einmaleins und dem gleichzeitigen Anwenden und Übertragen derselben auf die Zehner 2c. bethätigen.

In unwesentlichen Punkten gehen indes mündliches und schriftliches, Kopf- und Zifferrechnen aus einander, namentlich in folgenden drei:

1) Beim Kopfrechnen spreche ich meistens die vollständige Zahlbezeichnung, also nicht bloß jenen Teil, mit welchem ich soeben operiere. Wenn ich die Einer zu Einer addiere, so nenne ich dabei die Zehner und Hunderter mit. Beispiel: 317 und 72; 317 und 70 ist 387 und 2 ist 389. Zum mindesten lasse ich die vollständige Zahl nie lange aus dem Auge, um dem Vergessen vorzubeugen. Beim schriftlichen Rechnen dagegen zähle ich gemächlich zuerst die Einer zu den Einern und lasse darüber die übrigen Ziffern, nämlich die Zehner, Hunderter 2c. ganz außer Acht, da sie ja durch die Schrift fixiert sind und darum auch nicht vergessen werden können; darauf beschäftige ich mich ausschließlich mit den Zehnern, dann mit den Hundertern u. s. w.

2) Beim mündlichen Rechnen manipuliere ich stets mit den höheren Einheiten (etwa Tausendern) zuerst, mit den niedrigeren zuletzt, weil es mir dadurch ermöglicht wird, immer und immer wieder die ganze Zahl auszusprechen und zu wiederholen. Beim Zifferrechnen hingegen beginne ich umgekehrt mit den niedrigsten Zahlbestandteilen, nämlich mit den Einern und schreite successive zu den höheren, d. i. den Zehnern, Hundertern, Tausendern 2c. fort.

3) Beim Kopfrechnen bediene ich mich der verschiedensten Rechenvorteile; vor allem suche ich die Zahlen zu kürzen, der Regel folgend: Rechne mit möglichst kleinen und bequemen Zahlen! — Kürzungen und Rechenvorteile sind dagegen für das schriftliche Rechnen nicht von demselben Wert. Was liegt an einigen Ziffern mehr oder weniger? Hauptsache bleibt: Sicherheit des Verfahrens. Und darum ziehen wir hier nicht selten eine umständlichere, aber verlässige Lösung jeder Kürzung vor.

---

4. Kapitel.

Praktische Folgerungen und Nutzanwendungen für die Unterrichtsmethode.

Zählkurs, Rechenkurs.

Nachdem, wie wir uns überzeugt haben, Zählen und Rechnen zwei grundverschiedene Thätigkeiten sind, so müssen sie auch im Unterricht zeitlich getrennt betrieben werden.

Zuerst ist das bloße Zählen zu üben. Denn auf dem Zählen beruht alle Größenunterscheidung, beruht darum auch die Möglichkeit, zu rechnen. Das Zählen ist das Einfachste, Elementarste. Der Rechenunterricht muß mit ihm beginnen, von ihm ausgehen. — Dann haben

wir die Resultate des Einmaleins auffinden und memorieren zu lassen. Das ist das Zweite. — Endlich haben wir unsere Schüler in das Verständnis des Zahlensystems einzuführen. Und das ist das Dritte und Letzte. Daran werden sich unmittelbar die eigentlichen Übungen im Rechnen reihen.

Durch die Natur des Gegenstandes ist uns also ein bestimmter Unterrichtsgang vorgezeichnet. Wir haben das Kind zuerst Zählen zu lehren und ihm das Einmaleins aufsuchen und memorieren zu lassen, ehe wir vom Zahlensysteme und vom Rechnen handeln können. Diese Stufenfolge ist keine willkürliche, sondern eine notwendige; sie ist uns vorgeschrieben durch die eigentümliche Beschaffenheit der Sache. Dem Kursus im Rechnen hat vorauszugehen ein Kursus im Zählen, sowie im Einüben des Einmaleins. Da auch das Einmaleins, wie ich immer wieder betonen muß, aus dem Zählen erwächst und nur durch Zählen ermittelt und bewiesen werden kann, so können wir diesen Vorkurs des Rechnens nicht treffender bezeichnen, als wenn wir das Wort „Zählkurs“ dafür wählen. Wir haben zwar damit eine neue, vom üblichen Sprachgebrauch abweichende Bezeichnung gewählt, glauben aber hiezu vollauf berechtigt zu sein. Denn unser Wort vertritt in der That eine neue Einsicht, es steht für eine Sache, die man seither nur wenig (zum mindesten nicht in der vollen Schärfe, in der sie von uns dargestellt wird) erkannt hat. Man hat bis zur Stunde nicht genau zwischen Zählen und Rechnen unterschieden, man hat darum auch nicht die Nötigung zu einem eigenen Vorkurs des Rechnens (Zählkurs) begriffen. Wir aber werden auf Grund unserer eingehenden theoretischen Untersuchungen, Zählen und Rechnen auch im Unterricht auseinanderhalten, wir werden gleichsam eine Scheidewand zwischen ihnen errichten, wir werden beide als zwei getrennte, für sich bestehende Gebiete behandeln, als zwei gesonderte Gegenstände, von welchen jedoch der erste, nämlich das Zählen, den zweiten, d. i. das Rechnen, vorbereiten und begründen soll.

Der Zählkurs muß, wie schon das Wort sagt, als ein Kursus im bloßen Zählen gedacht werden. Vom Zahlensystem und vom Rechnen darf hier noch nicht die Rede sein. Der Schüler werde vor allem geübt im Zählen, er lerne die Ergebnisse des Einmaleins durch Zählen finden, durch Zählen verstehen und präge sich dieselben sodann dauernd seinem Gedächtnisse ein. Dann erst, wenn dies vollständig erreicht ist, wenn der schwächste Schüler unserer Klasse ebenso gewandt und sicher zu zählen vermag wie der begabteste, wenn es beim Aufsagen des Einmaleins wie Rädchen schnurrt, wenn die Antworten auf die Fragen: wie viel ist 3×6, 9×8, $14 - 5$, $7 + 6$ ꝛc.? plötzlich und ohne Besinnen, gleichsam Schlag auf Schlag erfolgen, dann erst mag man mit der Einführung in das Zahlensystem und in das Rechnen beginnen.

Nach meiner Überzeugung ist es total verfehlt, bereits im ersten oder zweiten Schuljahr vom Stellenwert der Ziffern u. dgl. zu handeln.

Das Kind partizipiere unbewußt an den Vorteilen unseres Zahlensystems, welche bereits die Sprache an die Hand gibt; es lerne die Ziffern von 1 bis 100 lesen und schreiben, aber vorläufig noch mechanisch; man lasse ihm, wenn es weiß, daß 3 + 6 = 9 ist, auch angeben, wie viel 13 + 6, 33 + 6, 73 + 6 ꝛc. macht; aber man spreche noch nicht von Einern und Zehnern mit ihm. Der Versuch, das Wesen der Dekadik schon während der ersten zwei Schuljahre und innerhalb des Zahlenraumes 1 bis 100 zum hellen Verständnis bringen zu wollen, würde doch nichts nützen und nur zu verworrenen Vorstellungen führen. Was das Zahlensystem im Grunde zu bedeuten hat, das vermag man allein beim Fortschreiten zu den Tausendern und nur dem reiferen, also zum mindesten neunjährigen Schüler klar zu legen. Behalten wir darum die Behandlung unseres dekadischen Systems ausschließlich dem dritten Schuljahre vor und lassen wir also erst in diesem Jahre, wo der Verstand unserer Kinder schon mehr entwickelt ist, zwischen Einer, Zehner ꝛc. unterscheiden!

Der Rechentisch,
ein neues Lehrmittel zur Veranschaulichung des Zahlensystems und der wichtigsten Rechenoperationen.

Es ist merkwürdig, daß uns Menschen das Einfachere, Natürlichere, Praktischere in der Regel erst spät einfällt. So hat man z. B. seither eine Unzahl künstlicher, komplizierter und kostspieliger Rechenapparate konstruiert und sich Patente darauf geben lassen. Aber das beste, zweckmäßigste, brauchbarste Veranschaulichungsmittel, das nahezu umsonst zu haben wäre, wurde übersehen.

Ich frage, was wäre natürlicher, als unsere Schüler mit Münzen manipulieren zu lehren, ihnen an unseren Münzen (Pfennigen, Zehnpfennigen, Markstücken ꝛc.) den Aufbau des Zahlensystems zu erläutern und die verschiedenen Rechenvorgänge zu verdeutlichen? Man brauchte zu diesem Zwecke nur ein beliebiges Tischchen herzunehmen und dessen Schublade mittelst Brettchen oder starker Pappendeckel in vier Fächer zur Aufnahme der Einer (d. i. der einzelnen Pfennige), der Zehner (d. i. der 10-Pfennigrollen und Zehnpfennigstücke), der Hunderter (d. i. der 100-Pfennigrollen, der 10-Zehnpfennigrollen und der Markstücke), sowie der Tausender (dargestellt durch Säckchen, in welche zehn Hundertpfennigrollen geschoben wurden) abzuteilen, die Tischplatte aber durch Pinselstriche oder schmale Holzleisten in vier vertikale Kolumnen oder Felder zu bringen, nämlich in das Einerfeld zum Auflegen der einzelnen Pfennige oder Einer, in das Zehnerfeld

zum Auflegen der Zehnpfennige oder Zehner, in das Hunderterfeld für die Hundertpfennige (Markstücke) oder Hunderter und in das Tausenderfeld für die Tausendersäckchen. Der Rechenapparat wäre fertig. Würde man nun vor den Augen der Schüler die genannten Geldsorten in die Fächer unserer Schublade einordnen und hernach wieder (je nach Bedarf) herausholen und eine jede in das ihrem Werte entsprechende Feld der Rechenplatte (also die einzelnen Pfennige in das Einer-, die Zehnpfennige in das Zehnerfeld rc.) legen; würde man ferner alle nur immer möglichen Rechenvorgänge an diesen Münzen, Rollen und Säckchen veranschaulichen, also z. B. das Entlehnen beim Subtrahieren und das Zerlegen beim Dividieren, indem man eine Zehnerrolle, Hunderterrolle oder ein Tausendersäckchen aus dem einen Feld in das andere herübernimmt, öffnet und dann deren Inhalt zur weiteren rechnerischen Operation auseinanderbreitet; würde man endlich die erste Zeit fast nie ohne Veranschaulichung rechnen lassen und würde man vor allem den Schüler selbst zu einem häufigen Manipulieren an der Rechenplatte anhalten, so daß er gezwungen wäre, sich die wichtigeren Einsichten durch eigene, selbständige und sinnenfällige Bethätigung zu verschaffen, resp. zu erläutern: unsere Kinder müßten, das kann unmöglich einem Zweifel unterliegen, ungemein rasch und sicher, von echter Lernlust getrieben, in das klarste, vollste Verständnis des Zahlensystems und Zifferrechnens eindringen.

Zur weiteren erschöpfenden Beschreibung meines Lehrmittels sei bemerkt,

erstens: die Einer, Zehner rc. müssen auf der Rechenplatte genau dieselben Stellen angewiesen bekommen, welche wir ihnen in unserer Zifferschrift zugeteilt haben: die Einer sind darum in das äußerste rechts liegende Feld zu legen, die Zehner in das zweite, das sich links vor der Einerkolumne befindet rc.,

zweitens: die Zehner müssen, wie bereits in Vorstehendem angedeutet wurde, in zwei Formen vorhanden sein, nämlich in jener der 10-Pfennigrolle und des Zehnpfennigstückes, die Hunderter sogar in drei Gestalten, nämlich als 100-Pfennigrollen, als 10-Zehnpfennigrollen und als Markstücke,

drittens: die 10- und 100-Pfennigrollen brauchen nicht alle echt zu sein, dieselben können zum Teil aus Metallhülsen bestehen, die etwa mit Sägkleien gefüllt und in blaues Papier eingerollt sind, ebensowenig alle Geldstücke, diese können durch Marken dargestellt werden,

viertens: die wenigen Rollen, welche zu öffnen sind, müssen aber wie die vorerwähnten aus Metallhülsen oder Kapseln bestehen, in welche sich die Geldstücke oder anstatt deren Marken leicht und rasch schieben und aus welchen sie sich eben so leicht und rasch wieder herausnehmen lassen. Denn die kindliche Hand ist zu ungeschickt,

um Rollen aus Papier zu machen oder dergleichen flink und ohne von dem Gelde etwas zu verstreuen, zu öffnen; auch ginge über diesen Manipulationen viel zu viel Zeit verloren.

Schließlich sei es mir noch vergönnt, die Vorzüge unseres neuen Rechenapparates in Kürze aufzuzählen:

1) Es lassen sich an demselben alle möglichen arithmetischen Operationen versinnbildlichen: das Aufbauen und Zerlegen größerer Zahlen, das Überzählen über den Zehner, Hunderter oder Tausender beim Addieren, das Entlehnen beim Subtrahieren u. s. w.

2) Unser Lehrmittel eignet sich vorzüglich zur Einführung in das gründlichste Verständnis des Zehnersystems. Denn es wird den verschiedenen Betrachtungsweisen der Zahlen, nach welchen dieselben bald als höhere dekadische Einheiten, also z. B. 10 Einer (d. i. 10 einzelne Pfennigstücke) als 1 Zehner (ein Zehnpfennigstück), 10 Zehner (10 Zehnpfennigstücke) als 1 Hunderter (ein Markstück), bald wieder als Vielheiten, also die Hunderter (Markstücke) als 10 Zehner (nämlich als 10-Zehnpfennigrollen) oder 100 Einer (d. i. 100-Pfennigrollen) erscheinen, vollkommen gerecht. Es ist kein Anschauungsmittel denkbar, an welchem sich die dekadischen Umwandlungen so klar, so deutlich, so verständlich machen ließen, wie dies hier durch unsere Münzen ermöglicht wird.

3) Durch die Übungen am Rechentisch wird das Lesen und Schreiben mehrstelliger Zahlen wesentlich unterstützt und erleichtert, da ja die Zehner (unserer Zifferschrift analog) auf der Rechenplatte ebenfalls links vor den Einern (einzelnen Pfennigen) und die Hunderter (Markstücke oder 100-Pfennigrollen) links vor den Zehnern liegen, der Schüler sonach die Ziffern für die Einer, Zehner, Hunderter nur in derselben Ordnung (Aufeinanderfolge) zu schreiben und zu lesen braucht, in welcher er die verschiedenen Geldsorten vor sich ausgebreitet sieht,

4) lernt das Kind am Rechentisch unser Geld kennen, lernt mit ihm umgehen, manipulieren; dieser Vorteil darf nicht unterschätzt werden.

5) Das rege Operieren und Manipulieren mit wirklichen Geldstücken muß in unsern Kleinen und selbst, wenn sie sehr schwach talentiert sein sollten, notwendig das Interesse am Unterrichte steigern, die Lernlust vergrößern.

6) Ist unser Lehrmittel ungemein einfach und natürlich; es füllt den Kopf des Schülers nicht mit eingebildeten, fingierten, gemachten Dingen, nicht mit Gegenständen, welche, wie die Mühlpfordt'schen Rechenapparate, die Heer'schen Scheiben ꝛc. nur für die Schule erfunden worden sind, nein, es bringt wirkliche, wahrhafte, praktische Rechendinge vor das sinnliche Auge, es bringt Rechendinge, die aus dem Alltagsleben herausgegriffen wurden und mit denen wir beständig im Handel und Verkehr zu thun haben, es bringt unsere gewöhnlichsten,

unsere wichtigsten, ja, ich möchte sagen, unsere einzigen thatsächlichen Rechendinge: die Münzen, und zwar vor allem die Pfennige, Zehnpfennige und Markstücke.

7) Ein Hauptvorzug unseres Lehrapparates dürfte endlich seine Billigkeit sein. Jedes wacklige, wurmstichige Tischchen und wenn es auch nur drei Füße hätte, jede Kommode, jeder niedrige Schubkasten lassen sich leicht und ohne erheblichen Kostenaufwand in einen Rechentisch nach unserer Idee umwandeln.

Anschauliches und abstraktes Rechnen, die zwei Hauptstufen unseres Lehrganges für das dritte Schuljahr.

Ich unterscheide zwei Arten des Rechnens, nämlich:

das anschauliche Rechnen, das Rechnen mit Gegenständen, welche dekadisch gruppiert sind und an welchen sich sämtliche Rechenoperationen sachlich ausführen lassen; es ist dies das Rechnen mit unsern Münzen, das Rechnen am Rechentisch;

das abstrakte Rechnen, das Rechnen mit Dingen, welche keinerlei Gruppierung oder sicher nicht die dekadische enthalten, deren Zerlegung in Einer, Zehner, Hunderter somit nur eine gedankliche ist und an welchen sich darum auch nicht ein Rechenvorgang wirklich, d. i. greifbar und sinnenfällig zur Anschauung bringen läßt.

Die Münzen, mit welchen wir auf dem Rechentisch manipulieren, sind in Rollen von je 10, je 100 gebracht. Ferner ist jeder besonderen Art von dekadischen Einheiten, nämlich den Einern oder einzelnen Pfennigen, Zehnern oder Zehnpfennigstücken, Hundertern oder Markstücken, Tausendern oder Tausendersäckchen ein besonderes Fach in der Schublade unseres Tischchens, sowie ein besonderes Feld auf der Rechenplatte angewiesen. Darum eignet sich unser Lehrmittel so überaus vortrefflich zur Versinnlichung einer jeden, auch der schwierigsten und kompliziertesten Zahloperation. Am Rechentisch läßt sich, wie bereits oben bemerkt wurde, verdeutlichen das Bilden und Zerlegen größerer Zahlen, das Überzählen über den Zehner, Hunderter, Tausender beim Addieren, das Entlehnen beim Subtrahieren, kurz, ein jeder Rechenvorgang, eine jede Rechenart. Wenn dann der Schüler zerlegt: „324 besteht aus 3 Hundertern, 2 Zehnern, 4 Einern", so weiß er, die 3 Hunderter, die 2 Zehner, die 4 Einer sind nichts Eingebildetes, nichts Fingiertes, sie sind nichts, was bloß auf dem Papier und nicht auch an sich existieren würde; er sieht sie ja in greifbarer Wirklichkeit auf den Feldern der Rechenplatte oder in den Fächern der Schublade vor sich liegen und deshalb denkt er beim Aussprechen der Hunderter sogleich an Markstücke oder Hundertpfennigrollen, beim Benennen der Zehner sogleich an Zehnpfennigstücke oder Zehnerrollen. Und wenn er dann Einer zu Einer, Zehner zu Zehner,

Hunderter zu Hunderter addiert oder von einander subtrahiert, so hat er auch für diese gedanklichen und rechnerischen Vorgänge ein konkretes Vorbild an den sinnlichen Manipulationen am Rechentisch. Der Schüler zerlegt ja die Zahlen genau in dieselben Bestandstücke (Einer, Zehner, Hunderter), in welchen sie auf der Rechenplatte auseinander gebreitet sind und ahmt im Geiste ganz dieselben Größenveränderungen nach, welche er vom Lehrer oder irgend einem seiner Mitschüler mittelst der Pfennige, Zehnpfennige und Markstücke in concreto vornehmen sieht; er addiert, wenn zu den Münzen auf der Rechenplatte noch andere hinzugefügt, und subtrahiert, wenn solche entfernt werden. Das Rechnen mit Pfennigen und Markstücken hat für unsern Schüler einen sinnlichen, anschaulichen Hintergrund, darum wird es ihm ungemein leicht und verständlich.

Anders verhält es sich bei der Berechnung irgend einer Anzahl von Personen, von Häusern, Bäumen, Pferden oder auch von Äpfeln, Nüssen u. dgl. Diese Gegenstände sind nicht dekadisch geordnet, wie die Pfennigstücke auf der Rechenplatte; die gedanklichen, rechnerischen Operationen, welche wir mit ihnen vornehmen und mittelst welcher wir das Resultat herausbekommen, lassen sich deshalb auch nicht mehr versinnlichen. Hier fällt alle Anschauung weg. Der Schüler operiert nur mehr mit Ziffern und nebelhaft verschwommenen Vorstellungen. Das Rechnen hat nun seine Sinnenfälligkeit, seine Anschaulichkeit vollständig eingebüßt. Alles an ihm ist abstrakt: Die Zahlvorstellung ist es, die dekadische Zerlegung, der eigentliche Rechenvorgang oder die Rechenart (Spezies). Nichts mehr wird sinnlich erfaßt, sinnlich angeschaut, sinnlich ausgeführt.

Nachdem wir nun auf allen Stufen unseres Lehrganges den Grundsatz: Vom Leichten zum Schweren, vom Anschaulichen zum Abstrakten! zur vollen Geltung bringen wollen, so werden wir im dritten Schuljahre zunächst nur anschauliches Rechnen betreiben, werden wir zunächst nur am Rechentisch und mit Pfennigen und Markstücken, also mit Gegenständen manipulieren lassen, bei welchen die dekadische Gruppierung eine sachliche und keine bloß gedachte und eingebildete ist. Dann erst, wenn das anschauliche Rechnen gut geübt und bis auf den letzten Rest verstanden ist, wenn es das Kind zur Sicherheit und Fertigkeit im Operieren mit unsern Münzen gebracht hat, also vielleicht gegen Ende des ersten und am Beginn des zweiten Semesters wollen wir zum abstrakten Rechnen fortschreiten, nämlich zum Rechnen mit allen möglichen Dingen und in Zahlenräumen, die sich durch unsere Münzen nicht leicht mehr veranschaulichen lassen, in Zahlenräumen, die bis zu Millionen und darüber hinausgehen und die nur abstrakt, begrifflich, schematisch vorgestellt, aber nicht mehr vor dem Sinnenauge ausgebreitet werden können.

III. Abschnitt.

Teilen und Enthaltensein.

1. Kapitel.

Von den Zahlen und Kontinuen.

Es gibt zwei Arten von Größen: Zahlen und Kontinuen.

Die Zahl ist an sich ein Vieles und darum unmittelbarer Gegenstand der Rechnung. Das Kontinuum (Linie, Fläche, Körper, Gewicht, Kraft, Bewegung) muß erst durch Messen und Teilen in eine Vielheit, in eine Zahl umgewandelt und dadurch für die rechnerische Behandlung tauglich gemacht werden. — Die Zahl entsteht durch aggregationsmäßiges Anhäufen, Ansammeln. Die Bestandstücke, aus welchen sie sich zusammensetzt (Einheiten, Einsen), gehen keinen wirklichen, keinen festen Zusammenhang ein; sie sind nur locker mit einander verbunden und lassen sich deshalb leicht verschieben, leicht trennen. Das Kontinuum dagegen ist eine in sich selbst zusammenhängende Größe, die keine Vielheit, keine Teilung enthält und auch nur durch gewaltsames Zerreißen oder Zerschneiden verändert werden kann.

Nun muß ausdrücklich bemerkt werden, daß die Gegenstände, mit denen wir im Alltagsleben rechnen, weder ausschließlich dem Gebiete der Zahl noch auch jenem des Kontinuums, sondern vielmehr beiden zugleich angehören. Wir rechnen nicht mit ausdehnungslosen Punkten, d. i. mit reinen diskreten Größen, aber auch nicht mit der ungeteilten Einheit, dem reinen Kontinuum; wir rechnen in der Regel mit Größenaggregaten (Zahlen), in welchen jedoch jede Einheit, jede Eins für sich ein Kontinuierliches ist. Ich erinnere nur an die Vorstellung „ein Dutzend Äpfel“. Hier haben wir den Begriff der Zwölf, also den Begriff der Vielheit oder Zahl und, da jeder Apfel etwas für sich ist, das beliebig geteilt werden kann, zugleich jenen des Kontinuums.

Der Umstand, daß unsere gewöhlichen Rechengegenstände sowohl an der Beschaffenheit der diskreten als auch an der Natur der kon-

tinuierlichen Größe partizipieren, ist wohl die Ursache, daß man im Unterrichte bisher zwischen den beiden Größenarten nicht unterschied, daß man sie alle zwei wie Kraut und Ruben in ein und denselben Topf warf, anstatt sie auseinander zu halten, daß man ihre Eigenschaften gedankenlos verwechselte und austauschte, daß man der Zahl Beschaffenheiten andichtete, welche allein dem Kontinuum zukommen können, daß man z. B. die Teilbarkeit als eine Eigentümlichkeit aller Größeneinheiten betrachtete, während wir doch Punkte und noch viele andere Dinge nicht zu zerstücken vermögen und daß man endlich das Teilen in Halbe, Drittel, Viertel ꝛc., welches man nur an Kontinuen, d. i. an Linien, Flächen und Körpern verständlich machen kann, bereits an Zahlen, nämlich an Aggregaten von Punkten, Strichen, Kugeln, Rechenpfennigen und dgl. zu lehren versuchte.

Was das Leben verbunden und geeint vorführt, das muß der Methodiker künstlich trennen. Er darf nicht alle Seiten seines Gegenstandes gleich von Anfang an und mit einem male aufdecken wollen; dadurch würde er im Gehirne seines Zöglings nur Unklarheit, Verwirrung, Konfusion erzeugen. Der Methodiker hat zu scheiden, zu isolieren; er hat das Mannigfaltige, das sich an seinem Lehrobjekte findet, in Elemente zu zerlegen und jedes Element gesondert und für sich zu behandeln.

Es ist wahr, die Unterscheidung zwischen diskreten Größen (Zahlen) und Kontinuen ist eine künstliche, gemachte; denn keines unserer Rechendinge (Punkte etwa ausgenommen) ist bloß diskret oder bloß kontinuirlich; aber dennoch bleibt unsere Distinktion für die Unterrichtsmethode, wie sich in der Folge noch klarer zeigen wird, von höchster Wichtigkeit. Hätten unsere modernen Rechenmeister die beiden Größenarten scharf auseinander gehalten, so hätte ihnen nie einfallen können, von Halben, Dritteln u. s. f. schon im ersten Schuljahre zu sprechen.

Zwei Eigenschaften sind es, durch welche sich das Kontinuum von der Zahl wesentlich unterscheidet: 1) Zusammenhang aller Teile, Einheit, 2) unbegrenzte Teilbarkeit. Die zweite Eigenschaft ist eine notwendige Folge der ersten. Nur das Zusammenhängende, Verbundene kann getrennt, zerstückt, geteilt werden. Teilbarkeit kommt allein dem Kontinuum zu. Was man seither das Teilen oder Dividieren der Zahlen genannt hat, ist ein vom eigentlichen Teilen, nämlich vom Zerschneiden der konkreten, also nicht blos gedachten Einheit grundverschiedener Vorgang.

Aber auch die diskrete Größe, die Zahl, besitzt Eigenschaften, welche ursprünglich nur ihr allein und keineswegs auch dem Kontinuum angehören. Es sind dies folgende zwei: 1) Außereinanderliegen ihrer Teile (Einsen), 2) Zählbarkeit. Das zweite Merkmal ist wiederum bloß eine Konsequenz des ersten. Nur das Außereinanderliegende, nur das Viele kann gezählt werden. Die Zählbarkeit

ist ein Vorzug, welchen die diskrete Größe vor der stetigen voraus hat. Das Kontinuum muß, wie früher schon einmal gesagt wurde, erst durch Messen und Teilen zu einem Zählbaren umgeformt werden.

Beim Messen trägt man die Zahl, die Vielheit in die kontinuierliche Größe gleichsam erst hinein. Umgekehrt stellt man sich die Vielheit (Zahl) häufig als ein zusammenhängendes Ganze, als eine ungetheilte Einheit vor.

Es findet sonach ein Austausch der Vorstellungsweisen statt: das Kontinuum wird unter dem Bilde der Zahl, die Zahl unter jenem des Kontinuums gedacht, oder wie wir dies noch anders ausdrücken könnten: die stetige Größe verwandelt man durch Messen und gedankliches Teilen in eine Zahlgröße, auf welche man dann alle bei Zahlen nur immer möglichen Rechenoperationen, also Addieren, Subtrahieren u. s. f. unverändert anwenden kann; die Zahl dagegen behandelt man nicht selten wie ein Kontinuum, indem man darauf die dem Gebiete der letzteren Größenart entstammenden Spezies: Teilen, Messen und Enthaltensein überträgt, also eine Zahl in Halbe, Drittel, Viertel ꝛc. zerlegt, ähnlich wie man eine Linie in zwei, drei, vier Stücke schneidet. Durch diesen Austausch der einer jeden Größenart eigentümlichen Rechenoperationen verlieren letztere natürlich an ihrer ursprünglichen Bedeutung und büßen sie an Klarheit und Verständlichkeit ein.

---

2. Kapitel.

Vom Teilen und Messen der Kontinuen.

Die eigentümliche Natur des Teilens.

Das Teilen ist eine der wichtigsten Größenveränderungen. Wir könnten Kontinuen, also Längenausdehnungen, Flächen, Körper, Bewegungen, zeitliche Größen weder genau unterscheiden noch weniger mit ihnen rechnen, wenn wir sie nicht in regelmäßige Teile zerlegen und dadurch zu einem Vielen, zu einem Zählbaren machen würden.

Teilen heißt eine Einheit zerstücken, ein Zusammenhängendes zu einem Vielen gestalten. Es ist sonach die Umwandlung der einen Größenart in eine andere, des Kontinuums in die Zahl, der Einheit in die Vielheit. Da die Vielheit *vor* dem Akte des Teilens nicht vorhanden ist, erscheint letzteres als etwas Schöpferisches. Man kann sagen, das Teilen bringt die Vielheit hervor, es erzeugt die Zahl.

Dem Zählen läßt sich das Teilen als sein Gegenstück, sein Pendant gegenüberstellen. Zählen heißt eine Vielheit zur Einheit zusammenfassen; Teilen dagegen heißt, eine gegebene Einheit in eine Vielheit auflösen. Das Teilen erweist sich sonach als das dem Zählen genau entgegengesetzte Verfahren. Bethätigt sich dieses

im Verbinden, Vereinen, so bekundet sich jenes im Trennen, Zerstücken. Hat das Zählen die gedankliche Einheit des Vielen zum Resultat, so umgekehrt das Teilen die gedankliche Vielheit, in welche es die Einheit zerlegt.

Trotz ihrer Verschiedenheit stimmen Zählen und Teilen in einigen Punkten vollständig überein:

1) Beide sind Beschaffungsweisen der Zahl. Nur in der Richtung gehen sie auseinander. Das Zählen erzeugt die Zahl durch Vereinen, Verbinden der getrennten Einsen; das Teilen oder Messen durch Zerstücken, Zerschneiden einer gegebenen Einheit.

2) Beide haben seiende Größen unterscheidbar zu machen.

3) Die Bestimmtheit, zu welcher Zählen und Messen führen, ist keine anschauliche; sie haftet lediglich am Wort, an der Bezeichnung.

4) Zählen und Messen müssen beendet werden, wenn sie wertvolles, zum Rechnen geeignetes Material beschaffen sollen. Beim Zählen dürfen wir keine Eins übersehen; beim Messen haben wir jeden, auch den kleinsten Rest in Zahlwerten zu veranschlagen.

Wenn wir das Verhältnis, in welchem das Messen oder Teilen zum Zählen steht, noch eingehender betrachten, so finden wir, daß das erstere, nämlich das Teilen, nie ohne das letztere, das Zählen, ist. Es wird gezählt entweder bei der Ausführung der Teilung oder unmittelbar nach derselben. Die Vielheit, welche aus dem Messen resultiert, würde nichts nützen, wenn sie nicht wiederum zur Zahl zusammengefaßt und benannt, d. h. mit einem anderen Worte: gezählt würde. Das Messen oder Teilen läßt sich insofern als eine Vorarbeit des Zählens, als ein Vorgang betrachten, welcher die Einheit so umzuformen hat, daß sie zu einem Zählbaren wird. Die Hauptaufgabe aber fällt dem nachfolgenden Zählen zu. Nur durch das Zählen erhalten die Teile ihre Benennung, ihre Bestimmtheit im Denken, ihre Anwendbarkeit auf das Rechnen. Und so kommen wir wieder auf unsern Grundgedanken zurück, daß *alle Größenunterscheidung allein auf dem Zählen beruht und daß darum der Zählakt das Fundament der gesamten Rechenkunst und Zahlenwissenschaft ist.*

Das ursprüngliche Objekt des Messens und Teilens.

Nur das Zusammenhängende, Verbundene, Geeinte, kann zerstückt, zertrennt, geteilt werden. Ich kann einen Apfel in Stücke schneiden, ich kann eine Linie, eine Fläche in beliebige Teile zerlegen, eben weil diese Dinge etwas Stetiges, Kontinuierliches sind. Was dagegen unzusammenhängend und lose ist, das braucht nicht erst in eine Vielheit gespalten zu werden. Der Begriff der Zahl nun ist identisch mit dem Begriff des Vielen, des Außereinanderliegenden, des Getrennten. Daraus folgt, daß nicht die Zahl, sondern allein die

stetige Größe, das Kontinuum der eigentliche und ursprüngliche Gegenstand des Messens und Teilens sein kann. Nur in einem bildlichen Sinne vermag man von einem Teilen der Mengen zu sprechen und nur unter einer ganz bestimmten Voraussetzung vermag ich diese Rechenspezies darauf zu übertragen und anzuwenden. Ich muß mir nämlich die Zahl unter dem Bilde des Kontinuums vorstellen, ich muß die außereinanderliegende Vielheit, die sie enthält, so betrachten, als ob sie ein zusammenhängendes, ungeteiltes Ganze wäre. Nur dann, wenn ich mir die Acht als Einheit, also in einer Form denke, die ihr als Zahl nicht völlig angemessen, nicht völlig adäquat ist, kann ich sie, ähnlich als wie den Apfel, in zwei Hälfte, vier Viertel, acht Achtel zerschneiden. Daraus folgt weiter, daß sich der Begriff des Teilens an Zahlen nur schwer wird gewinnen und entwickeln lassen. Wenn ich auch hundertmal vor den Augen meines Schülers 4 Kugeln, Hölzchen u. dgl. in 2 und 2 zerlege, so ist es noch sehr zu bezweifeln, ob dadurch wirklich die Vorstellung des Halbierens in ihm erweckt wird. Es wäre möglich, daß er beim Anblick der 4 Kugeln gar nicht an eine Zusammengehörigkeit denkt, daß darum auch das Auseinanderschieben der 2 und 2 nicht den Eindruck in ihm hervorruft, als ob eine Sache, ein Ganzes, eine Einheit wirklich geteilt würde. Er sieht die 4 in 2 und 2 zertrennen; er stellt sich aber weder die 4 als ein Zusammengehöriges, als eine Einheit vor, noch das Auseinanderschieben als einen Akt des Teilens und darum auch nicht die beiden 2 als die Hälften eines Ganzen. Er nimmt die 2 und 2 mit den Sinnen wohl wahr; er begreift aber nicht, wie diese Dinge Teile und zwar Halbe sein sollen. Wie verständlich wird dagegen meinem kleinen Rechenschüler das Teilen, wenn ich irgend eine konkrete Einheit, also etwa einen Apfel, in zwei Stücke schneide! Da unterliegt es keinem Zweifel, daß er wirklich den Begriff des Halbierens, sowie die Vorstellung der Hälften bekommt.

Man kann das Teilen, wie gesagt, an Zahlen nur schwer, an Kontinuen aber ungemein leicht verdeutlichen. Es ist dies auch sehr natürlich; denn die Zahl muß im Vorstellen erst zu einem Zusammenhängenden, Stetigen umgeformt werden, ehe jene Größenoperation darauf Anwendung finden kann; sie muß durch mein Denken, durch meine besondere Betrachtungsweise mühsam zu dem gemacht werden, was das konkrete Kontinuum, also der Apfel, bereits in der sinnlichen Wahrnehmung enthält und ist.

Aus diesem Grunde erscheint es verfehlt

1) das Teilen und die Bruchstücke $1/2$, $1/3$, $1/4$ an ganzen Zahlen veranschaulichen zu wollen. Was Brüche sind, wie sie entstehen u. s. w., das vermag ich nur an einer stetigen Größe wirklich klar zu legen;

2) ist es verfehlt, das Teilen ganzer Zahlen früher zu behandeln als das der konkreten Einheit, des sinnenfälligen Kontinuums. Die Vorstellung des Halben, Drittels, Viertels u. s. w. soll das Kind vor allem an stetigen Größen, an Linien und regelmäßigen geometrischen Flächen und Körpern gewinnen und dann erst mag es diese Teile auf Zahlen übertragen. Wir ahmen damit auch den Entwicklungsgang der Menschheit nach, welcher ja nach der übereinstimmenden Meinung unserer hervorragendsten pädagogischen Schriftsteller in vielen Dingen vorbildlich für den Unterricht ist. Das Zerschneiden eines Apfels in Hälfte, das Zertrennen einer Linie oder Fläche in zwei Teile ging dem Halbieren von Zahlen zweifelsohne lange voraus und bis man die Ausdrucksweise „2 ist $^1/_2$ von 4, $^1/_3$ von 6 rc" erfand, hatte man jedenfalls schon unzählige konkrete Einheiten in Halbe, Drittel u. s. w. zerstückt;

3) ist es verfrüht, von Halben, Dritteln rc. schon in der Anfangsklasse zu handeln. Das Messen und Teilen muß vielmehr einem späteren Schuljahre, etwa dem vierten, vorbehalten bleiben.

Wirkliches und gedankliches Teilen.

Das Teilen ist entweder ein wirkliches, reales und führt dann zur thatsächlichen Zerstückelung zusammenhängender Größen oder es ist nur ein gedankliches, ideelles. Das reale, wirkliche Teilen hat seine Grenzen; es muß irgend ein Teil der kleinste, d. h. nicht weiter zerlegbare sein. Das ideelle dagegen kann beliebig weit fortgesetzt werden. Kein Teil ist so klein, als daß er in Gedanken nicht wiederum in noch kleinere Stücke getrennt werden könnte. Insofern kann man sagen: es gibt für das Denken keinen kleinsten Teil.

Der Begriff der unendlichen Teilbarkeit hat aber nur den einen Sinn, daß man die Teilung eines Kontinuums, wenigstens in Gedanken, beliebig lang fortzusetzen vermag. Es liegt ihm jedoch keineswegs die Bedeutung zu Grunde, als ob irgend etwas aus unendlich kleinen oder unendlich vielen Teilen zusammengesetzt wäre.*) Unendliche Teilbarkeit ist nur ein Begriff für das Denken, er ist aber dessenungeachtet von höchster Wichtigkeit, da nur mittelst seiner die genauere Berechnung der veränderlichen Größen möglich wird.

Bei der gedanklichen Teilung eines Kontinuums bleibt die Zahl nur Bild, nur Vorstellungsform. Denn die stetige Größe wird dabei nicht wirklich zerschnitten; die Vielheit der Teile, also die Zahl, ist nur gedacht, nur eingebildet oder fingiert, aber nicht an sich und real existierend. Aus diesem Umstande ergibt sich eine Möglichkeit, welche für das Rechnen von eminenter Bedeutung

*) Vergleiche damit die Dühring'sche Kritik der Unendlichkeitsvorstellung in dessen „Natürliche Dialektik", Berlin 1865.

und Tragweite ist, die **Möglichkeit** nämlich, eine **Zahl**, insofern sie für Teile der **Kontinuen** gebraucht wird, nach **Bedürfnis** oder **Willkür** abzuändern und in andere Zahlen umzuwandeln. Wie ich ein und dieselbe Längenausdehnung bald durch m, cm, mm, bald durch Fuß, Zoll, Linien, bald durch Schritte, Spannweiten ꝛc. zu messen vermag, so kann ich sie selbstverständlich auch, dem Anlegen dieser verschiedenen Maßstäbe entsprechend, unter dem Bilde der verschiedensten Zahlen fassen; ich kann also sagen: die Breite meines Zimmers beträgt 7 m, aber auch, sie ist gleich 23 Fuß oder 276 Zoll oder 10 Schritte oder 700 cm oder 7000 mm u. s. w.

Diese Thatsache ist nun, wie bereits angedeutet wurde, von höchster Wichtigkeit; denn auf ihr beruht

1) das Resolvieren und Reduzieren der Maße, Beispiel: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;

2) das Resolvieren und Reduzieren der Brüche, Beispiel: $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 16/32 = 1800/3600$;

3) das Bruchrechnen. Ungleichnamige Brüche könnten weder addiert noch subtrahiert werden, wenn sie nicht auf gemeinsame Benennung gebracht würden. Beim Bruchrechnen haben wir es fast unausgesetzt mit Formwandlungen zu thun, wobei ein und dieselbe Größe der Reihe nach die verschiedensten Gestalten annimmt, also z. B. $1/2$ bald als $2/4$, bald als $3/6$, $12/24$, $5/10$ ꝛc. ꝛc. erscheint. Es versteht sich aber von selbst, daß wir hier jederzeit die einfachste und angemessenste Form wählen werden. Was ich mir unter dem Bilde von m denken kann, das fasse ich nicht ohne Grund als Vielheit von cm oder mm, und was ich als Halbe oder Drittel zu bezeichnen vermag, das drücke ich nicht als Zwölftel, Achtzehntel, Neunzigstel ꝛc. aus.

Bloßes Teilen und Messen.

Das Teilen besondert sich in zwei Arten:

1) in das **bloße Teilen**, d. i. das **Teilen eines Kontinuums ohne Beziehung auf eine andere Größe**. Eine Linie wird in zwei, drei, vier gleiche Stücke, also in Halbe, Drittel Viertel zerschnitten. Es findet dabei weder ein Vermehren noch Vermindern, sondern ein bloßes Trennen oder Zerstücken statt.

2) in das **messende Teilen**, das **Teilen einer Größe durch eine andere**. Die Höhe eines Turmes wird geteilt, gemessen durch Meter oder Fuß; eine Last wird geteilt, gemessen durch Pfunde, Kilogramme und Zentner; eine Wegstrecke wird geteilt, gemessen durch Kilometer, Poststunden und Meilen; ein Grundstück durch Quadratmeter, Ar und Hektar oder auch durch Quadratschuh, Dezimalen und Tagwerke. Auch bei dieser zweiten Art des Teilens

haben wir es weder mit einem Vermehren noch Vermindern, sondern mit einer bloßen Formwandlung zu thun. Die stetige Größe wird hier durch Messen und Wägen in Einheiten zerlegt, zu welchen das als Maß angenommene Kontinuum (Fuß, Meter; Pfund, Kilogramm, Zentner; Kilometer, Poststunde, Meile; Quadratmeter, Ar, Hektar; Quadratschuh, Dezimal, Tagwerk 2c.) das Vorbild abgab. Als Resultat folgt dabei immer eine Zahl, welche sagt, wie oftmal die als Maß gedachte Einheit in der ganzen zu messenden Größe enthalten ist. Wir wollen diese Zahl „Enthaltenseinszahl" und die ganze Operation das „Teilen im Sinne des Enthaltenseins" oder auch kurzweg das „Messen" nennen.

Im Unterrichtsgang muß das „bloße Teilen" vor dem „Messen" behandelt werden und zwar aus folgenden zwei Gründen:

erstens ist jenes (nämlich das bloße Teilen, das Teilen einer Größe ohne Bezugnahme auf eine andere) einfacher, elementarer als das Messen (das Teilen durch eine andere Größe) und zweitens kommt bei einem genaueren Messen auch das bloße Teilen in Anwendung. Um mit Bestimmtheit behaupten zu können, daß jenes Lineal nicht mehr und nicht weniger als $1\,^2/_3$ Fuß mißt, muß man die Maßeinheit „Fuß" in drei Teile (Drittel) zerlegen.

Darum: zuerst bloßes Teilen, dann Messen!

Von dem Versuche, alle Reste durch einerlei Art von Teilen, nämlich durch Dezimalbrüche zu messen.

Der gemeine Bruch wäre die genaueste, die exakteste Form für die Reste, welche sich beim Teilen und Messen ergeben. Da aber die Bruchеinheiten der Reste oder, wie wir es noch anders ausdrücken könnten, die Nenner der Teilzahlen, unter sich so verschieden, so mannigfaltig sind, wie die gemessenen Größen selbst, da jede besondere Brucheinheit, jeder besondere Nenner, wieder ein anderes Maß vorstellt, das Sechstel ein anderes als das Dreizehntel oder Zwanzigstel und da nur gleichnamige Größen, d. i. Zahlen, welche sich aus lauter gleichen Einheiten, also entweder nur aus Ganzen oder nur aus Halben oder nur aus Sechsteln, Dreizehnteln zusammensetzen, zu einander addiert und von einander subtrahiert werden können, so drängt sich das Bedürfnis auf nach einem gemeinschaftlichen Maß, nach einem Maß, das alle möglichen Teile mißt, alle möglichen Teile unter gleiche Benennung bringt. Und dieses Bedürfnis gab die Anregung zur Erfindung und Einführung der Dezimalbrüche. Daß aber durch die dezimalen Teile nicht alles genau gemessen werden kann, beweist allein der Ausdruck „0,3333 . . ." für die sehr einfache Vorstellung des Drittels. Dessenungeachtet lassen sich kleine Reste, /82 /365 /1225 2c. 2c. nur in der Form von Dezimalbrüchen gut

handhaben. Das Rechnen mit solchen minutiösen Bruchgrößen wäre ohne Anwendung der Dezimalbruchform mit nahezu unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden. Zudem gestattet die letztere durch fortgesetzte Hinzufügung neuer Stellen eine so große Annäherung an den thatsächlichen Größenbestand, daß es für die subtilste Berechnung ausreicht.

Die Dezimalbruchform darf aber den Gebrauch der gemeinen Brüche nicht vollständig verdrängen. Sie wird zwar stets da am Platze sein, wo es sich um sehr kleine oder schwer zu handhabende Bruchgrößen handelt. Für die meisten Fälle des praktischen Lebens jedoch, das selten die Veranschlagung subtilerer Reste fordert und das fast ausnahmslos mit Halben, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Achtel, Zehntel, Zwölftel und Hundertstel zu thun hat, dürfte der gemeine Bruch als die einfachere und die Sache am richtigsten treffende Form ewig vorzuziehen sein.

Im Unterrichte haben wir die gemeinen Brüche vor den Dezimalbrüchen zu behandeln und zwar dies schon aus dem einen Grunde, „weil", wie Salberg richtig bemerkt, „eben die nur beim Zifferrechnen verwendbare Dezimalbruchrechnung eine abgekürzte Schreibweise der gemeinen Brüche $^1/_{10}$, $^1/_{100}$ u. s. w.. ist".*)

Unterscheidung zwischen dekadischem Zahlen- und dezimalem Teilsystem.

Es wurde bereits im zweiten Abschnitt der ausführliche Nachweis geliefert, daß die Dekadik mit dem Zahlbegriff an sich nichts zu schaffen hat, daß unsere Mengenvorstellungen in der Regel einfach sind, d. h. die Vorstellung von nur einer Reihe, nur einer Gruppe oder Ansammlung. Ich behauptete oben und wiederhole es hier nochmals: Das Zahlensystem (oder richtiger „Zahl-Bezeichnungssystem") ist nichts als eine bestimmte Methode, Zahlnamen zu bilden, nicht aber die Art und Weise, Mengen vorzustellen.

Anders verhält es sich mit dem System der dezimalen Teile. Hier handelt es sich nicht etwa nur um eine Methode, Zahlbezeichnungen zu kombinieren, wir haben es vielmehr mit einer eigentümlichen Hervorbringungsart bestimmter Größen zu thun. Durch dezimale Teilung erhalten wir Zehntel, Hundertstel, Tausendstel 2c. Ein anderes Teilsystem, etwa das duodezimale würde auch zu völlig anderen Bruchstücken und zwar statt der Zehntel etwa zu Zwölftel, statt der Hundertstel zu Hundertvierundvierzigstel u. s. w. führen.

Es ist ziemlich gleichgültig, nach welchem Gesetz wir die Namen ganzer Zahlen bilden, ob nach dem dyadischen oder dekadischen oder duodekadischen. Die Fünfzehn bleibt die gleiche Menge, ob ich sie

*) s. Salberg's „Sachrechen-Methode", München 1874. S. 35.

nun so oder anders benenne und schreibe. Das Zahlensystem beeinflußt nur die Laut- oder Zifferbezeichnung, es ändert aber nichts an der Sache, d. i. an der Zahl oder Zahlvorstellung. Dagegen ist es nicht dasselbe, ob ich auf Bruchgrößen das dezimale oder duodezimale Teilsystem anwende; denn /10 und /100 sind doch ganz andere Teile als /12 und /144.

Nachdem nun das dekadische Zahlen- und das dezimale Teilsystem bei näherer Betrachtung als zwei verschiedene Dinge erscheinen, so müssen sie auch im Unterricht streng auseinander gehalten werden. Es verrät Oberflächlichkeit, wenn man, wie dies unsere modernen Methodiker: Adam, Böhme, Heuner ꝛc. in der That versuchen, an die Einführung in das dekadische Zahlen- sogleich jene in das dezimale Teilsystem reiht und den Anfänger im Rechnen schon nach den ersten Lektionen mit Dezimalbrüchen bekannt macht und zwar offenbar aus keinem andern Grunde, als weil beide, nämlich das Zahlen- und das Teilsystem, *in der schriftlichen Darstellung, in der Befolgung des arithmetischen Positionsgesetzes* (d. i. *des Gesetzes vom Stellenwert der Ziffern*) zufällig übereinstimmen.

Jenen Methodikern möchte ich zu bedenken geben, daß sie durch die vorzeitige Behandlung des dezimalen Teilsystems das Kind wohl an eine gewisse Fertigkeit im Benennen der zehnteiligen Brüche gewöhnen, aber noch keineswegs in das Verständnis desselben einführen. Ein sieben- oder achtjähriger Schüler lernt zwar in sehr kurzer Zeit die Zehntel, Hundertstel ꝛc. lesen und schreiben, denn das Gesetz, nach welchem die Bezeichnungen der Dezimalbrüche geformt wurden, ist dasselbe wie jenes, das der schriftlichen Darstellung ganzer Zahlen zu Grunde liegt; er kann jedoch noch nicht das geringste Verständnis für die dezimalen Bruchteile und deren eigentümliches Wesen besitzen. Wenn man nun dessenungeachtet eigensinnig darauf besteht, daß schon im ersten Schuljahre von Dezimalbrüchen u. dgl. geredet werden soll, so zwingen wir das Kind, Worte und Zeichen für eine Sache zu gebrauchen, von der es keinen Begriff hat.

Die dezimale Schreibung unserer Münzen, Maße und Gewichte darf im Unterrichte nicht verfrüht werden.

Unser bekannter Methodiker Heuner läßt bereits im ersten und zweiten Schuljahr m und dm, m und cm, *M.* und *₰* ꝛc. ꝛc. in der dezimalen Form, also die dm als Zehntelsmeter, die cm als Hundertstelmeter, die *₰* als Hundertstelmark lesen und schreiben. Dieser Versuch widerstreitet nach meiner Überzeugung der alten, goldenen Regel, wonach alles seine Zeit haben müsse und nichts überstürzt werden dürfe. Es ist wahr, der Schüler soll sich später der dezimalen Schreibweise bedienen können, daraus folgt aber nicht, daß schon in

der Vorbereitungsklasse mit ihr begonnen werden müsse. Es sprechen vielmehr triftige Gründe gegen ein solches Unterfangen.

Erstens ist der Schüler des ersten und zweiten Schuljahres nicht einmal sicher in der Schreibung ganzer Zahlen. Wozu ihn also durch die Vorführung der dezimalen Schreibweise noch mehr verwirren?

Zweitens fehlt es dem sechsjährigen Kinde notwendig an jedem Verständnis der Dezimalbrüche; darum kann auch die dezimale Schreibung keinen Sinn für dasselbe haben.

Drittens ist die dezimale Schreibung fast nur auf unsere Münzen, Maße und Gewichte, somit auf ein verhältnismäßig enges Gebiet beschränkt.

Viertens werden auch die Münzen, Maße und Gewichte noch häufig mit ihrer mehrfachen Benennung und als Ganze geschrieben und gelesen. Wenn wir somit den Schüler sich der alten Schreibweise, nach welcher jede Münzsorte u. dgl. unter einer besonderen Bezeichnung, also 5 ℳ 75 ₰ eben als 5 ℳ 75 ₰, nicht aber nach unserer modernen Manier als 5,75 ℳ aufgeführt wurde, bedienen lassen, so gewöhnen wir ihn dadurch keineswegs an eine Darstellungsform, die er später vollständig aufgeben und durch eine neue ersetzen müßte.

Sollte es aber trotz alledem aus praktischen Gründen geboten sein, bereits dem A-Be-Ce-Schützen die dezimale Schreibung einzutrichtern, so könnte dies auch auf eine mehr mechanische Weise geschehen. Erklärungen, Begründungen u. dgl. würden ja doch nicht verstanden werden, somit ihren Zweck verfehlen. Man sage den Kindern einfach: „5 ℳ 75 ₰ schreibt man gewöhnlich so an: 5,75 ℳ. Was vor dem Beistrich steht sind Mark, was hinter demselben steht, Pfennige. Der Beistrich hat die Mark von den Pfennigen zu trennen“.

Die Dringlichkeit und Unaufschiebbarkeit dieses Bedürfnisses will mir indes selbst beim besten Willen nicht einleuchten. Und da ich meinem Schüler nicht eher eine Sache betreiben lassen möchte, bis er ihr das nötige Verständnis entgegenbringt, so werde ich von der dezimalen Schreibung erst im 4. Schuljahre handeln. Wer langsam und bedächtig vorwärts schreitet, kommt oft rascher und sicherer zum Ziel, als wer sich überhastet.

Das Teilen muß durch wirkliches, sinnliches Teilen einer stetigen Größe gelehrt werden.

Beschreibung des Teillineals.

Nur das Teilen der Einheit, des konkreten Kontinuums, der Linien, Flächen und Körper darf als ein wirkliches und eigentliches Teilen bezeichnet werden. Von einem Teilen der Zahl, d. i. der in

Einheiten bereits zerstückten Größe kann dagegen nur in einem bildlichen und übertragenen Sinne die Rede sein. Ich brauche die 4, die 6 nicht erst in Teile zu zerlegen; sie besteht ja schon aus solchen; jede einzelne Eins, welche die 4 und 6 enthält, ist ein Bestandteil für sich, ein besonderer Teil der ganzen Zahl. Wenn ich sodann aus der 4 die 2 und 2, aus der 6 die 3 und 3 herausgreife und räumlich auseinanderrücke, so ist das ein ganz anderer Vorgang, als wenn ich einen Apfel in zwei Stücke zerschneide. In beiden Fällen habe ich zwar halbiert. Bei den Zahlen 4 und 6 aber war das Halbieren nur ein Auseinanderschieben von Zahlbestandteilen, welche bereits vorher getrennt und nur im Denken zur Einheit verknüpft waren; bei dem Zerschneiden eines Apfels hingegen habe ich wirklich und eigentlich geteilt, nämlich durch Kraft Verbundenes, real Zusammenhängendes gewaltsam zertrennt; der Apfel ist an sich und nicht bloß für unsere Betrachtungsweise eine Einheit und darum bedeutet das Zerschneiden bei ihm ein thatsächliches, ein konkretes Teilen, kein bloßes Auseinanderlegen.

Nur durch das Teilen eines wahrhaften und sinnenfälligen Kontinuums vermag ich dem Kinde sowohl den ursprünglichen, klaren Begriff des Teilvorganges, als auch der Teile zu geben. Was $1/2$, $1/3$ 2c. ist, das kann ich dem Schüler durch Zerschneiden eines Apfels, durch Zerstücken einer Linie, nie und nimmer aber an Zahlen, wenigstens nicht in vollster Anschaulichkeit verständlich machen.

Ich werde in meinem Unterrichtsgange das Teilen der Einheit d. i. des realen Kontinuums, dem Teilen der Vielheit, der Zahl, vorausschicken und zwar aus den eben angedeuteten Gründen. Erstens ist das Teilen der Einheit allein ein wirkliches, das der Zahlen dagegen ein imaginäres, bildliches und zweitens können die Begriffe des Halben, Drittels 2c. nur durch Zerschneiden eines Kontinuums klar, bestimmt, sicher gewonnen werden.

Das Teilen vermöchten wir sowohl an einer geraden Linie, als auch an einer ebenmäßig begrenzten Fläche (Quadrat, Rechteck, Kreis) oder an einem geometrischen Körper, (Kugel, Walze, zerlegbaren Würfel) zu veranschaulichen. Wir wollen uns jedoch ausschließlich der Linie bedienen, weil sich an derselben die Teilungen am leichtesten und raschesten vornehmen lassen und weil an ihr alle wichtigeren Divisionsbegriffe entwickelt werden können, dieselbe als Veranschaulichungsmittel somit vollkommen ausreicht.

Der Schüler soll die Teilungen der Linie in Halbe, Drittel 2c., sowie die Umwandlungen der Halben und Drittel in Ganze oder auch in Sechstel, Zwölftel 2c. selbst ausführen, er soll sich die für das Bruchrechnen nötigen Veranschaulichungen selbst verschaffen. Zu diesem Zwecke erhält er ein kurzes, flaches, zwei Dezimeter langes Lineal in die Hand, das, ähnlich unsern Maßstäben, an den Rändern

durch kurze senkrechte Striche geteilt ist und zwar an dem einen Rande der obern Seite in Halbe, Viertel, Achtel und Sechszehntel, an dem anderen in Drittel, Sechstel, Zwölftel und Vierundzwanzigstel; an dem ersten Rande der unteren Seite in Drittel, Neuntel und Achtzehntel und endlich an dem letzten in Fünftel, Zehntel und Zwanzigstel. Es enthält sonach, um die Teile zu ordnen: /2, /3, /4, /5, /6, /8, /9, /10, /12, /16, /18, /20 und /24. Zur leichteren Unterscheidung mag man jedem Rande noch eine besondere Farbe geben, also dem einen etwa Weiß, dem andern Blau, dem dritten Rosa und dem vierten Gelb. Soll die Teilung in Halbe, Viertel, Achtel oder Sechszehntel vorgenommen werden, so kommandiert der Lehrer: „Legt den weißen Rand auf!" oder auch: „Weißer Rand in die Höhe!" Dann erst befiehlt er: „Zieht eine Linie! Teilt dieselbe in 2, in 4, in 8, in 16 Stücke!" — Soll die Teilung in Sechstel, Zwölftel und Vierundzwanzigstel ausgeführt werden, so heißt es: „Legt den blauen Rand auf!" u. s. f.

Dieses Lineal, das wir, da es die im Leben am häufigsten vorkommenden Bruchteile aufgetragen hat und nur zur Veranschaulichung des Teilvorganges, sowie der Teile benutzt wird, Teillineal nennen wollen, wird in unserer methodischen Behandlung eine wichtige Rolle spielen. Ich werde ihm eine ähnliche Aufgabe zuweisen, wie unserm Rechentisch. Die schwierigsten Bruchoperationen sollen dem Schüler durch die kräftige Unterstützung, welche unser neues Lehrmittel seinem Auffassungs- und Urteilsvermögen gewährt, auf das klarste entwirrt und dargelegt werden.

---

3. Kapitel.

Vom Verteilen und Zerlegen der Zahlen.

Es gibt Größenveränderungen, welche allein den diskreten Größen, den Zahlen eigentümlich sind. Zu diesen gehört vor allem das Auseinanderlegen oder Verteilen, das sich wiederum in zwei Arten sondert, nämlich

1) in das eigentliche Verteilen und

2) in das bloße Gruppieren oder Zerlegen. Sollten wir diese Operationen auch auf stetige Größen anwenden, so müssen wir letztere erst in eine Vielheit zerschneiden, wir müssen sie in Zahlgrößen umwandeln und zwar nicht bloß gedanklich, sondern in Wirklichkeit durch thatsächliche Zerstückelung. Verteilen und Gruppieren läßt sich eben nur das Auseinanderliegende, das Getrennte. Im Kontinuum aber hängen die Bestandstücke so fest zusammen, daß sie nicht verschoben und darum auch nicht verteilt oder gruppiert werden können.

Das Verteilen.

Was es ist. — Ein Auseinanderlegen der Mengen auf 2, 3, 7, 20 ꝛc. Häufchen, ein Bilden kleinerer Zahlen aus einer gegebenen größeren. Jede beliebige Art von Dingen (Pfennige, Nüsse, Erbsen, Bohnen, Steinchen ꝛc.) kann verteilt, d. h. in kleinere Häufchen, Mengen, Gruppen gebracht werden. Ich verteile, wenn ich aus der Zwölf die Zahlen 6 und 6 oder 4 und 4 und 4 oder 3 und 3 und 3 und 3 bilde. — Obschon außer dem Verteilen in gleiche Mengen auch zuweilen, wie z. B. in der Gesellschafts- oder Teilungsrechnung, ein Zerlegen in ungleiche Stücke, also der Zwölf in 9 und 3 oder in 4 und 8 oder in 3 und 4 und 5 u. s. w. gefordert wird, so werden wir in unserem Lehrgange doch dem ersteren, als der Regel, den Vorzug einräumen und werden, so oft wir vom Verteilen sprechen, auch nur das Auseinanderlegen in gleich große Zahlen darunter verstehen. Verteilen hieße sonach, aus einer gegebenen größeren Menge eine bestimmte Anzahl kleinerer und zwar gleicher Mengen machen.

Worin sich das Verteilen vom eigentlichen Teilen unterscheidet. — In folgenden zwei Dingen: 1) Das Verteilen setzt eine Vielheit voraus. Ich kann nur verteilen, was in mehreren Exemplaren vorhanden ist. Das Teilen dagegen geht auf die Einheit, auf das real Zusammenhängende, Stetige, Kontinuierliche. Zahlen können darum wohl verteilt, sie können aber nicht geteilt werden, wenigstens nicht im eigentlichen und ursprünglichen Sinne. Wenn ich die 12 in 6 und 6, in 4 und 4 und 4 ꝛc. zerlege, so ist das kein Teilen, nämlich kein Zerschneiden einer wirklichen und konkreten Einheit, sondern ein bloßes Verteilen, d. i. ein Auseinanderschieben von diskreten Größen, Mengen, Zahlen.

2) Durch das Verteilen erhalte ich kleinere Mengen, aber keine Halben, Drittel, Viertel ꝛc.; das Teilen führt dagegen zu den eben genannten Brüchen, also zu Halben, Dritteln ꝛc., d. i. zu kleineren Kontinuen, kleineren Einheiten, die wieder beliebig geteilt werden können.

Wie das Verteilen sinnlich bewerkstelligt werden kann. — Genau auf dieselbe Weise, nach welcher Kinder verfahren, wenn sie Nüsse, Zeltchen, Kirschen, Schusser u. dgl. unter sich verteilen. Zuerst wird bestimmt, wie viele Häufchen gemacht werden sollen, dann wird jedem derselben ein eigener Platz angewiesen, es wird also ausgemacht, auf welche Seite des Tisches der Anteil Fritzen's und auf welche derjenige Mariechen's gelegt werden soll und dann erst wird mit dem eigentlichen Verteilen begonnen, indem man von der vorhandenen Anzahl Zeltchen u. dgl. immer je eines dem ersten (etwa Fritzen's) und eins dem zweiten (Mariechen's) Anteil zuweist.

Wichtigkeit und Häufigkeit des Verteilens. — Unsere Spezies kommt im Leben beständig zur Anwendung und zwar

1) so oft aus dem Preis für eine Mehrheit der Preis für die Einheit gesucht werden soll. Beispiel: Ein Dutzend Bleistifte kostet 48 ₰, was 1 Stück? — Lösung: 1 Stück kostet den 12. Teil von 48 ₰ oder 4 ₰.

2) so oft eine Sache von einem auf mehrere Besitzer übergeht. Beispiel: 3 Geschwisterte erben von ihrer Tante 12 000 ℳ, was trifft auf eines? Lösung: der 3. Teil von 12 000 ℳ oder 4 000 ℳ.

Wie die Aufgaben des Verteilens gestellt werden können. — In zwei Formen, nämlich 1) in der Form der Ordnungszahl, z. B. Berechnet den dritten Teil von 12 000 ℳ! den zwölften Teil von 48 ₰!

2) in der Form der Bruchzahl, z. B. Suchet $1/3$ von 12 000 ℳ! $1/12$ von 48 ₰! ꝛc. Die erstere Darstellungsweise scheint mir aber die passendere, angemessenere, empfehlenswertere zu sein, da sie ungleich klarer als die Bruchzahl angibt, erstens, daß so und so viele Teile, also wie in obigem Beispiele, drei Teile gemacht werden müssen und zweitens, daß die Größe eines Teiles, d. i. nach unserm Beispiele, des dritten oder letzten Teiles gesucht werden soll.

Wann und wie das Verteilen im Unterricht behandelt werden muß. — Das Verteilen ist, wie bereits oben dargethan wurde, ein wichtiger Rechenvorgang, der sich, was seine praktische Bedeutung anbelangt dem Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren ebenbürtig anreiht. Daraus folgt, daß ihm auch in unserem Lehrgange eine der ersten und bevorzugtesten Stellen eingeräumt werden muß, daß wir also möglichst bald mit ihm zu beginnen, sowie daß wir es möglichst klar und verständlich zu begründen haben. Nach meiner Überzeugung ist es nicht verfrüht, wenn man schon in den ersten zwei Schuljahren vom Verteilen der Zahlen handelt. Aber zwei Bedingungen muß ich dabei stellen, Bedingungen, von deren Befolgung es allein abhängen wird, ob unser Lehrverfahren als ein wahrhaft naturgemäßes, vernünftiges, rationelles bezeichnet werden darf oder nicht.

Erstens: der Schüler ist in das klarste, hellste Verständnis unserer Zahlenoperation einzuführen. Dies wird am besten dadurch erreicht, daß wir ihm auf seiner Schiefertafel selbst Verteilungen von Strichen, Ringelchen u. dgl. vornehmen lassen.

Zweitens fordere ich, daß während der ersten 3 oder 4 Schuljahre beim Verteilen nur die Ordnungszahl gebraucht, die Bruchform aber ganz umgangen wird. Dem Kinde darf, so lange es nicht das Teilen der stetigen Größe in Halbe, Drittel ꝛc. gelernt hat, keine Aufgabe gegeben werden, in welcher Brüche vorkommen. Man

kann von ihm verlangen: „Berechne den dritten Teil von 12 000 M.!" aber nicht: „Suche das Drittel von dieser Zahl!"

Wann beim Verteilen die Bruchform gebraucht werden darf. — Nachdem im praktischen Leben die Aufgaben unserer Rechenart ebenso häufig in Bruchform, als in der Form der Ordnungszahl ausgedrückt werden, so werden wir auch im Schulunterrichte erstere, nämlich die Bruchform, auf das Verteilen zuweilen anwenden lassen. Das darf aber nicht eher geschehen, als bis 1) die Kinder die Halben, Drittel, Viertel ꝛc. durch das Zerschneiden eines Kontinuums kennen gelernt haben und 2) bis ihr Verstand so gekräftigt ist, daß er sich die Zahlen annähernd (vollständig wird es nie gelingen) unter dem Bilde der stetigen Größe vorzustellen vermag.

Das Zerlegen oder Gruppieren der Mengen und die Ermittlung des Enthaltenseins.

Was das Zerlegen oder Gruppieren ist. — Es ist das Ordnen, Auseinanderlegen einer Menge nach dem Musterbild, Vorbild einer Zahl oder geometrischen Figur. Ich zerlege, gruppiere, wenn ich 15 Steinchen so ordne, daß sie lauter Dreier oder Fünfer, d. i. Gruppen von je 3, je 5 Steinchen darstellen, oder daß sie eine bestimmte Figur, etwa ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die letztere Art kommt jedoch nur höchst selten zur Anwendung; ich werde darum, so oft ich vom Gruppieren spreche, vorzugsweise das Zerlegen in gleiche Zahlen, also in Dreier, Fünfer ꝛc. darunter verstehen.

Worin es sich vom bloßen Verteilen unterscheidet. — 1) Darin, daß beim Gruppieren wohl die Zahl angegeben ist, nach deren Vorbild die vorhandene Menge zerlegt werden soll, daß also gesagt wird: mache aus der Fünfzehn lauter Dreier oder Fünfer, daß aber erst gesucht werden muß, wie viel solcher Teile (Gruppen) dargestellt werden können. Beim Verteilen ist mir umgekehrt die Anzahl der zu machenden Teile bekannt, aber nicht wie groß ein jeder ist. — Wir könnten das Verhältnis, in welchem Gruppieren und Verteilen zu einander stehen, auch kurz so ausdrücken: Bei jenem ist die Größe der einzelnen Teile gegeben, doch nicht ihre Anzahl; bei diesem dagegen ist die Anzahl der Teile bekannt, aber nicht ihre Größe. Dort ist gesagt: Suche, wie oft mal 3 die 15 enthält! — hier: Bestimme, wie viel der fünfte Teil oder das Fünftel beträgt!

2) Unterscheidet sich das Zerlegen oder Gruppieren vom bloßen Verteilen auch darin, daß bei ersterem die Teile (Gruppen) wohl auseinander gerückt, aber nicht vollständig von einander losgerissen und daß sie nicht als selbständige, für sich bestehende Mengen, sondern nur als Bestandstücke eines größeren Ganzen betrachtet werden; während bei letzterem an keine Zusammengehörigkeit der ein-

zelnen, resultierenden Stücke mehr gedacht wird, die Teile also nicht bloß als auseinandergelegt, sondern als gänzlich losgetrennt und einander entfremdet erscheinen. Wer glaubt, daß diese Distinktion auf bloßer Spitzfindigkeit beruht, der vergegenwärtige sich einmal recht lebhaft, was die beiden Ausdrücke: „3 ist in der 15 fünfmal enthalten" und „der fünfte Teil von 15 ist 3" im letzten Grunde bedeuten. Er wird finden: das erste Resultat, nämlich „3 ist in der 15 fünfmal" besagt, daß die 15 noch immer als ganze Zahl vorhanden und gegenwärtig ist; das zweite Ergebnis dagegen „$^1/_5$ von 15 ist 3" spricht aus, daß wir nicht mehr die ganze 15, sondern nur einen Ueberrest, ein Ueberbleibsel derselben, nämlich das Fünftel oder die „Drei" vor uns haben.

Aufgaben des Gruppierens. — Dieselben können gegliedert werden in wertvolle oder praktische Aufgaben und in Spielereien.

Zu den ersteren gehört

1) das Gruppieren, welches ermittelt, wie oft eine Grundzahl in ihren Vielfachen, also etwa die 2 in der 4, 6, 8 u. s. w. enthalten ist;

2) das Ordnen der Mengen in dekadische Gruppen, d. h. in Gruppen von je 10, je 100, je 1000 2c. Auf ihm basiert unser Zahlensystem, sowie die Möglichkeit des Rechnens.

3) Das Abteilen der Waaren nach den üblichen Zählmaßen, also nach Paar, Dutzend, Mandel, Schock, Gros; Heft, Buch, Ries, Ballen 2c.

Als zwecklose Spielerei muß dagegen bezeichnet werden:

1) das Zerlegen einer Zahl in alle ihre möglichen Posten (Summanden) z. B. 27 = 3 + ?; 27 = 6 + ?; 27 = 11 + ? 2c.

2) das Zahlenvergleichen
   a) 27 ist um wie viel größer als 3?
   b) 3 ist um wie viel kleiner als 27?
   c) 27 ist das Wievielfache von 3?
   d) 3 ist der wie vieltste Teil von 27?

3) das Zahlenergänzen
   a) 3 und wie viel ist 27?
   b) das Wievielfache der 3 muß ich zu 7 hinzuthun, um 34 zu erhalten?

4) die Umkehrung des Zahlenergänzens, nämlich die demselben entsprechende Art des Zahlenverminderns
   a) 27 weniger wie viel ist 3?
   b) Wie oftmal muß ich die 3 von der 34 subtrahieren, damit 7 bleibt?

Bedeutung des Zerlegens oder Gruppierens zur Ermittlung des Enthaltenseins. — Die Frage nach dem Enthaltensein der Zahlen drängt sich im Rechnen des täglichen Handels und Verkehrs fortwährend auf. So oft ich zu bestimmen suche, auf wie lange ein gegebener Vorrat (sei es nun ein solcher an Geld oder an Lebensmitteln oder an Baumaterial oder auch an Futter für Pferde ꝛc.) ausreichen kann, wenn wöchentlich oder täglich oder stündlich so und so viel verbraucht wird, ferner, so oft ich berechnen muß, wie viele Stücke (resp. g, kg, Zentner, l, hl, m ꝛc.) man für eine bestimmte Summe bekommen wird, wenn 1 Stück (g, kg, Zentner, l, hl, m ꝛc.) so und so viele ₰ oder ℳ kostet: habe ich es mit der Lösung durch Enthaltensein zu thun. Ihr ist sonach im praktischen Rechnen eine unendlich wichtige Rolle zugeteilt. Aber wie wird das Enthaltensein selbst ermittelt oder mit anderen Worten, wie kommt der Mensch zu der Einsicht, daß z. B. 4 in der 8 zweimal, in der 12 dreimal, in der 16 viermal u. s. w. steckt? Nach meiner Ueberzeugung kann dies nur auf folgende zwei Arten geschehen

1) durch Zerlegen und Gruppieren der Mengen. Um zu erfahren, wie oft mal die 4 in der 12 enthalten ist, muß man 12 Gegenstände (Nüsse, Steinchen, Erbsen, Bohnen, Würfel, Striche, Punkte ꝛc.) in Gruppen von je 4 abteilen.

2) Durch fortgesetztes Abzählen (Subtrahieren). Man vermag die Thatsache, daß 4 in der 12 dreimal ist, auch dadurch zu finden, daß man von 12 Dingen (Nüssen, Steinchen u. dgl.) zuerst 4, dann wieder 4 und schließlich noch einmal 4 wegnimmt. Es wird sich dadurch herausstellen, daß die 4 von der 12 dreimal subtrahiert werden kann, daß sie somit auch dreimal in ihr enthalten sein müsse.

Jede dieser beiden Ermittlungsweisen hat ihre Berechtigung. Welcher aber der Vorzug einzuräumen ist, ob der ersteren (nämlich jener durch Zerlegen und Gruppieren) oder der letzteren (d. i. der durch fortgesetztes Subtrahieren) will ich hier noch nicht entscheiden. Für den Unterricht aber würde ich vorschlagen, daß man dem Schüler beide Verfahrungsweisen anwenden lasse.

Bedeutung des Zerlegens oder Gruppierens für das Zahlensystem und darum indirekt auch für das Rechnen überhaupt. — Als man den Mengen ihre Bezeichnung gab, hatte man dieselben dekadisch gruppiert und hatte nur die wichtigsten Gruppen, also die Zehner-, die Hunderter-, die Tausendergruppe, sowie die Einheiten 1 bis 9 und noch die Zahlen 11 und 12 mit besonderen Namen belehnt. Das brachte einen doppelten Vorteil mit sich: 1) brauchte man nur verhältnismäßig wenig Worte zur Bezeichnung aller, selbst der größten Zahlen zu erfinden und 2) war die Reihe der Zahlnamen nun leicht zu behalten. Ohne gruppierendes Zerlegen der Mengen hätte man Millionen besonderer Laute für die

Zahlbezeichnung bilden, Millionen von Wörtern dem Gedächtnis einprägen müssen. Noch um vieles wichtiger erscheint uns die Dekadik, wenn wir die Rolle in's Auge fassen, welche dieselbe im Rechnen spielt. Das Zahlensystem und deshalb auch alle Vorteile, welche aus ihm erwachsen, verdanken wir aber, was ich mit besonderem Nachdruck betonen muß, ausschließlich dem dekadisch gruppierenden Zählen, welches wiederum nur eine eigentümliche Art des Zerlegens und Gruppierens der Mengen ist.

Die Zahlenbilder, welche von den neueren und neuesten Methodikern mit besonderer Vorliebe beim ersten Rechenunterricht verwendet werden, beruhen ebenfalls auf dem Gruppieren. Das Zahlenbild zerlegt eine Zahl in zwei, drei und mehr Bestandstücke (Gruppen), läßt dieselben deutlich, d. i. sinnenfällig heraustreten und führt sie dadurch zum Bewußtsein. Nachdem aber ein und dieselbe Zahl sich auf die verschiedenste Weise gruppieren und darstellen läßt, so folgt daraus von selbst, daß auch die verschiedensten, die mannigfaltigsten Zahlenbilder denkbar sein müssen. Ein jedes von ihnen wird andere Teile der betreffenden Zahl zur Unterscheidung bringen; keines aber wird alle möglichen Zerlegungen zugleich und mit einemmal veranschaulichen könnnen. Insofern sind alle Zahlenbilder gleich gut und gleich mangelhaft. Der Streit, welche dessenungeachtet die empfehlenswerteren seien und den Vorzug vor den anderen verdienten, muß für mich schon deshalb gegenstandslos sein, weil ich ja den Gebrauch der fixierten, stereotypen Zahlenbilder von vornherein und grundsätzlich verwerfe.

Schlußbemerkung zum dritten Abschnitt.

Das Denken darf nicht in der Thätigkeit des Detaillisierens und Spezifizierens beharren; es hat sich immer wieder zu erheben zu dem wichtigen Akt des Vereinens, Verallgemeinerns, Generalisierens. Die Vielheit von Beziehungen, die es an seinem Gegenstande entdeckt und die Unterscheidungen, die es an demselben gemacht hat, muß es gleichsam wieder aufheben, verwischen, aber nicht so, daß es dieselben ignoriert und als nicht existierend betrachtet, sondern dadurch, daß es sich auf einen anderen, auf einen höheren Standpunkt stellt, auf einen Standpunkt, welcher das auseinanderstrebende Mannigfaltige wieder als Einheit erblicken und überschauen läßt.

Wir haben uns überzeugt: Teilen und Verteilen, Messen und Gruppieren sind total verschiedene Vorgänge. Aber wir dürfen bei dieser Einsicht nicht stehen bleiben. Alles bloße Detaillisieren und Spezifizieren beschränkt den Geist; macht ihn einseitig, borniert. Wir

haben die Größenoperationen, deren Natur im vorliegenden Abschnitte bis in's einzelnste beschrieben und klargelegt wurde, unter einem höheren, allgemeineren, abstrakteren Gesichtspunkte zu betrachten; wir haben, nachdem ihre Unterschiede erkannt sind, nun auch das, worin sie übereinstimmen, worin sie wesensähnlich erscheinen, worin sie sich gleichsam als die verschiedenen Seiten ein und derselben Sache dokumentieren, in's Auge zu fassen, mit einem Worte, wir haben nach einem Begriffe zu suchen, der sowohl das Teilen und Messen der Kontinuen, als auch das Verteilen und Gruppieren der Zahlen in sich einschließt und unter sich begreift.

Und dieser Begriff, der alles, was ich in meinem dritten Abschnitt nur immer vorgebracht habe, zur Einheit zusammenfaßt, heißt

Teilen.

Mit einiger Berechtigung kann ich sagen: ich habe im Vorstehenden nur von einem einzigen Gegenstand gehandelt, nämlich vom Teilen und zwar selbstverständlich sowohl vom Teilen der stetigen Größen, als auch von jenem der Zahlen.

Da aber der Begriff des Teilens ein zu allgemeiner, vager ist und da er sich zunächst in zwei engere, bestimmtere Hauptbegriffe verzweigt, nämlich in das bloße oder eigentliche Teilen und in das Teilen nach dem Vorbild oder Maßstab einer anderen Größe (Messen, Enthaltensein), so habe ich diesem Abschnitte als Ueberschrift die beiden Worte vorgesetzt: Teilen und Enthaltensein, und glaube dadurch meinen Gegenstand hinlänglich charakterisiert und angedeutet zu haben.

Das bloße oder eigentliche Teilen besondert sich wieder

1) in das Teilen eines Kontinuums, d. i. das Zerstücken der realen Einheit in Halbe, Drittel, Viertel ꝛc.

2) in das Teilen der Zahl, d. i. das Verteilen einer gegebenen Menge auf zwei, drei, vier ꝛc. Häufchen.

Das Enthaltensein gliedert sich ebenfalls

1) in das Enthaltensein der stetigen Größen, welches durch Messen oder Wägen, und

2) in das Enthaltensein der Zahlen, das entweder

a) durch Zerlegen und Gruppieren oder

b) durch fortgesetztes Subtrahieren ermittelt werden kann.

IV. Abschnitt.

Die wichtigsten Zähl- und Rechenarten, zugleich eine Spezifizierung und Sichtung des gesamten Rechenstoffes der Volksschule.

---

1. Kapitel.

Von der Unterscheidung zwischen Zähl- und Rechenarten.

Die Mengen der Dinge sind in einer fortwährenden Veränderung begriffen; sie werden vermehrt, sie werden vermindert, sie werden verteilt oder gruppiert. Für uns Menschen, die wir ja in einem beständigen ununterbrochenen Verkehr mit der Außenwelt stehen, ist es nun von höchstem Interesse, das Resultat der jeweiligen Größenveränderung zu erfahren, um danach unsern Handel und Wandel, unser Thun und Lassen bestimmen und einrichten zu können. Jede konkrete Zahl, jede gegebene Mehrheit von Gegenständen repräsentiert eine Macht, die segenbringend, aber auch verhängnisvoll, verderblich für uns werden kann. Darum, weil uns so ungemein viel daran liegen muß, den jeweiligen Mengenbestand der Außendinge und zwar vor allem jener Außendinge, von welchen unser Einfluß, unser Ansehen, unser Wohlbefinden großenteils abhängt (Eigentum, Geld u. dgl.), zu ermitteln, so haben wir die bewunderungswürdigen Operationen: Zählen und Rechnen erfunden.

Beim Zählen und Rechnen ahmen wir die äußeren Größenveränderungen, nämlich die Vorgänge des Vermehrens, Verminderns, Gruppierens und Verteilens künstlich nach, indem wir die Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren. Das Addieren ist aber eine andere Thätigkeit als das Subtrahieren und dieses wiederum eine andere als das Multiplizieren und Dividieren. Man hat darum von jeher zwischen diesen vier Operationen unterschieden und sie als besondere Rechenarten oder Spezies bezeichnet.

Ein noch tieferes Eindringen in die Natur unseres Gegenstandes führt zu der Ueberzeugung, daß sich die Rechenspezies aus bestimmten Arten und Weisen des Zählens entwickelt haben, daß eine Reihe von Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisions-

resultaten durch Zählen gefunden, durch Zählen festgestellt und bewiesen werden mußte, ehe man zu rechnen vermochte, daß jeder Rechenart eine Zählart vorausgegangen ist und daß diese Arten des Zählens (einmaliges und mehrmaliges Zuzählen, einmaliges und fortgesetztes Abzählen, verteilendes und gruppierendes Zählen) die Grundlage, die Basis sind, auf welcher unsere Rechenspezies ruhen.

Wie das Rechnen überhaupt auf das Zählen gepfropft ist und gleichsam aus diesem herauswächst, so leiten sich auch die Rechenspezies von den Zählarten ab. Durch Übertragung und Anwendung der Zählergebnisse $7 + 5 = 12$, $9 - 6 = 3$, $6 \times 3 = 18$ ꝛc. auf größere Zahlen, auf Hunderter, Tausender, Millionen ꝛc werden jene zu Rechenergebnissen und damit werden zugleich auch die Zählarten, aus welchen jene Resultate ($7 + 5 = 12$, $9 - 6 = 3$ ꝛc.) hervorgegangen sind, zu Rechenarten. Das einmalige Hinzuzählen einer Zahl zu einer andern wird auf diese Weise zur Rechenspezies der Addition, das mehrmalige Hinzuzählen einer Zahl zu sich selbst wird zu jener der Multiplikation, das einmalige Abzählen einer Zahl von einer anderen wird zur Rechenart der Subtraktion, das verteilende und gruppierende Zählen endlich zu der der Division.

So oft wir ein Resultat durch bloßes Zählen ermitteln, haben wir es mit irgend einer bestimmten Zählart zu thun, so oft wir ein Ergebnis durch eigentliches Rechnen, d. i. durch Zerlegen der Zahlen in Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. mit gleichzeitigem Verwenden des Einmaleins finden, bethätigen wir eine Rechenart.

Es sind dies keine spitzfindigen, wertlosen Distinktionen, sondern notwendige, durch die Beschaffenheit unseres Gegenstandes aufgezwungene Unterscheidungen. Dinge, die an sich verschieden sind, müssen auch vom Denken auseinandergehalten werden. Dadurch, daß ich die eigentümliche Natur des Zählens und Rechnens, sowie der möglichen Zähl- und Rechenspezies vollständig aufdecke, ermögliche ich doch wenigstens eine zweckmäßigere, der Sache angemessenere Abstufung und Gliederung des Lehrganges.

---

2. Kapitel.
Die einfachsten Zählarten.

Welches sind nun die einfachsten und zugleich die wichtigsten Zählarten?

Nach meiner Überzeugung folgende sechs:

1) das einmalige Zuzählen einer Zahl zu einer anderen oder das Addieren, z. B. $7 + 5 = 12$;

2) das einmalige Abzählen einer Zahl von einer anderen oder das Subtrahieren, z. B. $12 - 5 = 7$;

3) das mehrmalige Zuzählen einer Zahl zu sich selbst oder das Multiplizieren, z. B. 2 × 6 = 12;

4) das Verteilen einer Menge auf eine bestimmte Anzahl von Häufchen oder das Dividieren im Sinne des bloßen Teilens oder richtiger Verteilens. Diese Zählart führt zu den Ergebnissen: „Der 2. Teil von 2 ist 1, der 2. Teil von 4 ist 2, der 2. Teil von 6 ist 3 rc.," oder auch: „$1/2$ von 2 ist 1, $1/2$ von 4 ist 2, $1/2$ von 6 ist 3 rc.;"

5) das Auseinanderlegen einer Menge in bestimmte kleinere Zahlen, also etwa in Dreier, Vierer, Fünfer, aber ebenfalls ohne die ganze Zahl wirklich zu vermehren oder zu vermindern und nur zu dem einen Zwecke, um zu erfahren, wie oftmal sich die 2, 3, 4 rc. aus der größeren Zahl darstellen lassen oder mit einem andern Ausdrucke, wie oft jene kleineren Zahlen in der ganzen gegebenen Menge enthalten sind. Wir wollen diese Zählart das zerlegende oder gruppierende Zählen oder auch das Dividieren im Sinne des Enthaltenseins nennen. Ihre Resultate können in folgender Form ausgesprochen werden: „2 ist in 4 zweimal enthalten, 2 ist in 6 dreimal enthalten rc." oder ganz kurz: „2 ist in 4 zweimal, 2 ist in 6 dreimal rc.;

6) das Messen und Teilen der stetigen Größen, also der Längenausdehnungen, Flächen, Körper rc. Durch die beiden Vorgänge: Messen und Teilen, welche aber nicht vollständig getrennt werden können, da wir uns ein Teilen in gleiche Stücke nicht ohne vorausgehendes Messen und ein Messen nicht ohne gedankliches Teilen vorzustellen vermögen, erhalten wir entweder eine Mehrheit von Bruchstücken, wie Halbe, Drittel, Viertel rc. oder eine Mehrheit bestimmter Maßeinheiten, wie m, cm, mm; kg, g; hl, l rc.

Betrachten wir das Verhältnis, in welchem diese Zählarten zu einander stehen!

Durch die erste und dritte (Addieren und Multiplizieren) werden die Größen vermehrt; durch die zweite (Subtrahieren) werden sie vermindert; durch die vierte, fünfte und sechste endlich werden sie weder vermehrt noch vermindert, sondern nur zerstückt, getrennt, geteilt. Wir bekommen daher folgendes Schema:

I. Arten des Vermehrens

1) das Addieren
2) das Multiplizieren

II. Arten des Verminderns

3) das Subtrahieren

III. Arten des Teilens oder Dividierens

4) das Dividieren im Sinne des Verteilens
5) das Dividieren im Sinne des Enthaltenseins
6) das Messen und Teilen der kontinuierlichen Größen.

Diese letztere Spezies nimmt (mit den übrigen fünf verglichen) eine exceptionelle Stellung ein. Denn sie geht nur auf eine einzige Größenart, sie beherrscht ein enges Gebiet, während die anderen sich sowohl auf die diskreten, als auf die stetigen Größen, sowohl auf Zahlen, als auf Kontinuen, kurz auf alles anwenden lassen, was vermehrt, vermindert, geteilt werden kann. Dessenungeachtet gehört sie zu den wichtigsten arithmetischen Operationen.

Schließlich will ich noch bemerken, daß die Zählarten kompliziertere Anwendungen des bloßen Zählens sind und auf letzteres zurückgeführt und von ihm abgeleitet werden müssen, daß wir es also bei ihnen nicht etwa mit besonderen, eigentümlichen Arten und Weisen des Zählens, sondern eben nur mit dem einfachen, dem simplen, dem allbekannten Zählen zu thun haben, d. h. mit jenem Zählen, das von Eins ausgeht und an der Zahlenreihe successive zum Ergebnis fortschreitet. So ist die erste Zählart (Addieren) nichts als das bloße Zählen, angewandt auf zwei Zahlen, welche mit einander vereinigt werden sollen; die zweite Zählart nichts als das simple Zählen, gebraucht bei Zahlen, die von einander getrennt oder abgezogen werden müssen; die dritte Zählart (Multiplizieren) besteht in einem mehrmaligen Zuzählen, sie ist somit eine besondere Form der ersten Spezies und darum im letzten Grunde auch nichts anderes als eine Anwendung des einfachen Zählens auf einen bestimmten Fall. — Das bloße Zählen bildet nach dem allen die Grundlage, den Ausgangspunkt, ja selbst den Inhalt unserer sämtlichen Zählarten. Um zu erfahren, daß $7 + 5 = 12$ ist, mußte man zuerst die 7, darauf die 5 und schließlich noch beide Zahlen von Eins ab durchzählen, mußte man also das bloße, einfache, simple, ungekünstelte Zählen verwenden. Außer dieser einen Art gibt es keine andere. Und nur in einem uneigentlichen Sinne können wir das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren als besondere „Zählarten“ bezeichnen.

---

3. Kapitel.
Die komplizierteren Zähl- und Rechenarten.

Alle Größenveränderungen bestehen entweder in einem Vermehren oder in einem Vermindern oder in einem Teilen, mit welchem wieder ein Vermehren oder Vermindern verbunden sein kann. Die Arten des Vermehrens sind: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren, von welchen aber selbstverständlich nur die beiden ersten in der Volksschule behandelt werden dürfen. Zu den Arten des Verminderns gehört vor allem das Subtrahieren.

Zu bemerken ist nun, daß die eben genannten, auf dem bloßen Vermehren oder Vermindern beruhenden Zählarten aus sich heraus keine neue Spezies zu begründen vermögen, daß es zu neuen Rechenarten allein kommt durch Hereinziehung des Teilens und Messens (Enthaltenseins). Die möglichen Arten des bloßen Vermehrens und Verminderns sind bald erschöpft. Das Teilen dagegen kann auf die mannigfaltigste Weise vollzogen werden. Es befaßt einen Reichtum von möglichen Beziehungen und Modifikationen in sich, der, wenn wir damit die Dürftigkeit und geringe Kombinationsfähigkeit der aus dem bloßen Vermehren oder Vermindern erwachsenden Spezies vergleichen, geradezu Staunen erregen muß. Es gibt nicht etwa, wie man in unseren rechenmethodischen Lehrbüchern lesen kann, nur zwei Divisionsgattungen; nein, wir können, wenn wir wollen, sogar ein ganzes Dutzend unterscheiden. Jede besondere Möglichkeit, die beim Messen und Teilen statt haben kann, begründet wieder eine eigene Spezies. Bis jetzt haben wir davon kennen gelernt

1) das Messen und Teilen der stetigen Größen,

2) das Verteilen der Mengen auf eine bestimmte Anzahl Häufchen, aber ohne die Größe im übrigen zu vermehren oder zu vermindern,

3) das Zerlegen oder Gruppieren der Mengen in bestimmte Zahlen, also in Zweier, Dreier, Zehner, Hunderter rc. oder in Paare, Dutzende, Schock, Gros.

Das sind die drei einfachsten, leichtesten und verständlichsten Divisionsarten. Daran lassen sich die übrigen, welche jedoch, wie bereits angedeutet wurde, ungleich komplizierter und verwickelter sind, zwanglos anreihen.

Aus dem bloßen Teilen und Verteilen leiten sich ab:

1) die Gesellschaftsrechnung oder das Teilen einer Größe in ungleiche Teile,

2) die Durchschnittsrechnung oder die Berechnung der mittleren Quantität,

3) die Mischungsrechnung oder das Suchen des mittleren Wertes einer Mischung oder Legierung, die Berechnung der mittleren Qualität.

Das Teilen und Verteilen verbindet sich häufig mit dem Vermindern, Verringern der Größen. Wir erhalten dadurch zwei weitere Spezies

1) das Teilen eines gegebenen Quantums mit Reduktion
   a) auf einen Teil, z. B. $^1/_4$ von 24 ist 6,
   b) auf mehrere Teile, z. B. $^3/_4$ von 24 ist 18.

2) das Zerlegen einer Potenzzahl in ihre Faktoren mit gleichzeitiger Reduktion auf einen derselben (die Wurzel) oder das Radizieren, z. B. $\sqrt{64} = 8$.

Auf dem Zerlegen, Messen, Gruppieren, Enthaltensein beruht endlich
1) die Prozent- und Promillerechnung,
2) die Lösung der Verhältnisaufgaben.

Auch die Flächen- und Körperrechnung (Raumrechnung) kann mit vollstem Fug und Recht den Rechenarten des Messens oder Enthaltenseins zugeteilt werden.

---

4. Kapitel.

Die vier Grundrechnungsarten und das Einmaleins.

Nicht alle Spezies sind gleich wichtig, gleich unentbehrlich. Wir haben im Ganzen nur vier Rechenarten, welche unbedingt notwendig sind und in keiner Weise umgangen werden können, nämlich
1) Addieren,
2) Subtrahieren,
3) Multiplizieren und
4) Dividieren im Sinne des Enthaltenseins.

Mittelst dieser wenigen Zähl- und Rechenarten lassen sich alle denkbar möglichen Aufgaben lösen; auf sie lassen sich alle übrigen, mehr oder weniger komplizierten Spezies zurückführen; wir werden sie darum, dem herkömmlichen Sprachgebrauche folgend, die „Grundrechnungsarten" nennen. Unter ihnen ist der vierten und letzten jedenfalls die wichtigste Rolle zugewiesen. Denn das Teilen im Sinne des Enthaltenseins hat uns die Lösung sämtlicher mehr oder weniger verwickelten Divisionsaufgaben zu ermöglichen.

Doch auch nicht alle Ergebnisse der vier Grundrechnungsarten sind für uns von gleicher Bedeutung, nicht alle müssen unbedingt durch Zählen gesucht werden. Daß 2 mal 36 = 72 ist, kann ich z. B. viel leichter, rascher und sicherer mittelst Rechnen finden. Es sind verhältnismäßig wenig Zahlenresultate, welche wir n u r auf dem Wege des Zählens zu beschaffen vermögen; es sind dies bloß jene Ergebnisse, die durch das Hinzufügen der Grundzahlen oder Einer (Beispiele: $7 + 5 = 12$; $9 - 3 = 6$; $7 \times 3 = 21$; 3 in 12 ist 4 mal) entstehen.

Diese Resultate, die Resultate des kleinen Einmaleins, bilden einen der wichtigsten Gegenstände der gesamten Arithmetik, denn sie allein ermöglichen erst das Rechnen. Man hat ihnen darum von jeher große Beachtung geschenkt, man hat sie seit uralter Zeit in besondere Reihen gebracht und dieselben dann tüchtig auswendig lernen lassen.

Betrachten wir nun die bisherigen Einmaleinstabellen, die zwar in unseren Schulen gegenwärtig verpönt sind, aber von den Buch-

bindern und Krämern doch noch immer feilgeboten und von unsern Schülern mit stillschweigender Genehmigung oder selbst auf ausdrücklichen Wunsch des Lehrers gekauft und memoriert werden, etwas genauer!

Was enthalten diese Tabellen? Antwort: Die wichtigsten, die unentbehrlichsten, die nur durch Zählen zu beschaffenden Ergebnisse der vier Grundrechnungsarten, d. i. jene Resultate, welche durch ein- bis zehnmaliges Hinzufügen und ein- bis zehnmaliges Wegnehmen der Grundzahlen (Einer) entstehen. Wir könnten diese Ergebnisse, da sie sich aus Einern zusammensetzen und nur durch die Addition, und Multiplikation der Einer gebildet werden, viel richtiger „Einerresultate“ oder auch, da sie allein durch Zählen ermittelt werden können, „Zählresultate“ nennen. Letztere Bezeichnung sagt uns, wie, auf welche Weise, durch welches Mittel die Wahrheiten des Einmaleins gefunden, bewiesen, verstanden werden, sie stellt dieselben in einen Gegensatz zu den Rechenergebnissen, sie kennzeichnet die Sache am schärfsten, deutlichsten, klarsten und verdient darum den Vorzug vor allen anderen.

Aus wie vielen Tabellen setzt sich das Einmaleins zusammen? Antwort: Aus vieren, nämlich aus einer Additions-, einer Subtraktions-, einer Multiplikations- und einer sogenannten Divisionstabelle. Dies entspricht genau der Vierzahl der Grundrechnungsarten. Die Anzahl unserer Tabellen wird darum in Zukunft weder vermehrt, noch verringert werden können; sie wird feststehend stereotyp bleiben für immer.

Nach welchen Gesichtspunkten wurden die einzelnen Reihen der Einmaleinstabellen gebildet? — Offenbar nach solchen, welche allein für das schriftliche oder Zifferrechnen maßgebend sein können. Dies geht deutlich daraus hervor, daß man

1) die Resultate zum Teil in eine Form kleidete, welche eben nur bei der schriftlichen Lösung zulässig und gebräuchlich ist, daß man also die Subtraktionsreihen so gestaltete:

2 von 2 bleibt 0
2 „ 3 „ 1
2 „ 4 „ 2 ꝛc.

anstatt: 2 weniger 2 ist 0
3 „ 2 „ 1
4 „ 2 „ 2 ꝛc.;

2) daß man beim Aufbau der Reihen bloß die Spezies, die Operation, nicht aber in gleicher Weise auch die einzelne Zahl zu ihrem Rechte kommen ließ. Die Ergebnisse der Multiplikationstabelle waren z. B. so geordnet:

2 mal 2 ist 4
2 „ 3 „ 6
2 „ 4 „ 8 ꝛc.

Hier gibt offenbar das Zweimalnehmen, die Operation den einzigen und ausschließlichen Gesichtspunkt bei der Reihenbildung ab. Jede Grundzahl kommt in unserer Reihe nur einmal vor, so die 2 nur einmal, die 3 nur einmal, die 4 nur einmal rc., keine von ihnen, also weder die 2, noch die 3, die 4 rc. wird darin vollständig, d. h. von ihrem Zwei- bis Zehnfachen abgewandelt.

Nach meinem Dafürhalten sind Operation und Zahl zwei gleich wichtige, gleich notwendige Elemente des Rechnens. Es gibt kein Rechnen ohne Operation, d. h. ohne gedankliche Veränderung der Menge; aber ebensowenig wäre eine Operation möglich ohne eine Zahl, an welcher sie sich vollzieht. Operation und Zahl gehören notwendig zusammen, sie bedingen sich gegenseitig. Darum dürfen sie auch im Rechenunterricht weder einander über- noch untergeordnet werden. Beide haben gleichen Anspruch auf Berücksichtigung. — Die alte Methode ließ die einzelne Zahl nicht zur vollen Geltung gelangen; sie verarbeitete den Rechenstoff ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der Spezies; das war einseitig und unzweckmäßig. Aber ebenso einseitig ist das Grube'sche Lehrverfahren, welches die Zahl über die Spezies stellt und diese gleichsam als einen Appendix, ein Anhängsel von jener behandelt.

Der besonderen Art von Reihenbildung, welche die alten Einmaleinstabellen charakterisiert, ist indes nicht alle Berechtigung abzusprechen, da sie sich, wie ich noch eingehender darlegen werde, überaus trefflich zur Einführung in das schriftliche Rechnen eignet. Aber daß unsere seitherigen Tabellen ausschließlich oder doch vorwiegend auf das schriftliche Rechnen angelegt waren und das mündliche oder Kopfrechnen fast gar nicht berücksichtigten, das war ein Fehler, den die künftige Methode wird vermeiden müssen.

Endlich: was ist von der vierten oder der Divisionstabelle zu halten? — Antwort: Die Vorstellungen, welche derselben zu Grunde liegen, sind offenbar vag, verschwommen, unklar. Neuere Methodiker (Hentschel, Grube rc.) haben auf das eklatanteste nachgewiesen, daß zwischen der Division im Sinne des Teilens und jener im Sinne des Enthaltenseins unterschieden werden müsse. Sie haben somit aus der einen Spezies zwei gemacht. Ein noch tieferes Eindringen in die Natur der Zähl- und Rechenoperationen aber führt zu dem überraschenden Resultat, daß es nicht bloß zwei, sondern ein ganzes Dutzend verschiedener Divisionsarten gibt. Unsere seitherige Tabelle jedoch läßt uns über diese möglichen Spezies völlig im unklaren; was sie uns bietet, ist ein Zwittergebild, ein Gemengsel, ein Sammelsurium aus den verschiedensten Vorstellungsbestandteilen, es setzt sich zusammen aus drei wesensverschiedenen Zähl- oder Rechenvorgängen, nämlich aus: Teilen, Enthaltensein und Subtrahieren, resp. Reduzieren. Dieser Unklarheit in der Sache entsprechend ist auch die Fassung, die

sprachliche Bezeichnung für dieselbe eine unbestimmte, schwankende, konfuse. Man weiß nicht, soll man sagen: 2 in 2 geht 1 mal, oder 2 durch 2 geht 1 mal, oder 2 von 2 geht 1 mal, oder 2 in 2 ist 1 mal. Unsere Divisionstabellen bringen gewöhnlich den unklarsten, rätselhaftesten der angeführten Ausdrücke, nämlich den: 2 in 2 geht 1 mal. Eine Zahl geht in eine andere. Was soll das heißen und was wird sich unser Schüler dabei denken? Die Unklarheit, in welcher uns die seither üblichen Tabellen über die Arten des Teilens lassen, sowie das Zweideutige, Unbestimmte in der sprachlichen Einkleidung der einzelnen Divisionsergebnisse sind also wieder wesentliche Mängel.

Die beiden Aufgaben des Einmaleins.

Die Resultate des Einmaleins haben einen Wert für sich, abgesehen von ihrer Bedeutung für das Rechnen. Viele Aufgaben des praktischen Lebens gehören dem Einmaleins an und werden unmittelbar durch dasselbe gelöst.

Beispiel: 1 m kostet 7 *M*, was kosten 9 m? — Es ist in diesem Exempel das 9 mal-Nehmen der 7 *M* verlangt. Wie viel aber 9 mal 7 beträgt, das sagt mir das Einmaleins. Habe ich nun die Ergebnisse desselben tüchtig memoriert, so werde ich ohne langes Besinnen das gewünschte Resultat angeben können. Im andern Falle müßte ich mir die Thatsache, daß $9 \times 7 = 63$ ist, erst durch Zählen beschaffen. Das Einmaleins überhebt mich also der Mühe des umständlichen Nachzählens; es hilft mir eine Arbeit ersparen. Da nun das Leben tausende von Aufgaben stellt, welche innerhalb der engen Grenzen des Einmaleins liegen, und wir somit tausendmal zu einem zeitraubenden, mühsamen Zählen gezwungen wären, so ist der Dienst, den uns das Memorieren desselben leistet, ein sehr wichtiger, wesentlicher.

Wer die Resultate des Einmaleins zu dutzendenmalen mittelst Zählen sucht und findet, aber sie nie auswendig lernt, der gleicht einem Menschen, der aus einer langen Reihe von Lebenserfahrungen keine Nutzanwendung zu ziehen versteht. Was hilft es mir, wenn ich für den Augenblick weiß, daß $9 \times 7 = 63$ ist, doch diese Thatsache im nächsten Moment wieder vergessen habe? Hat mich jene Zählerfahrung etwa klüger, verständiger gemacht, hat sie mein Wissen wirklich bereichert? Und muß es nicht als höchst unzweckmäßig und unmethodisch bezeichnet werden, wenn der Rechenlehrer von heutzutage seinem Schüler das Einmaleins zwar durch Zählen finden, aber nicht zugleich auswendig lernen läßt?

Vermeiden wir diesen Abweg! Dringen wir in unsern Schulen wieder mehr auf das wörtliche Memorieren! Lassen wir die einzelnen Reihen wacker auswendig lernen, auf daß sie zu einem Wissen, zu

einem sicheren, geistigen Eigentum werden, und auf daß unsere Kinder alle Aufgaben, welche der Sphäre des Einmaleins entnommen wurden, ohne lang' Besinnen frei aus dem Kopf zu lösen vermögen und der Mühe des ewigen Nachzählens enthoben sind.

Besonders wichtig aber ist das Einmaleins für das Rechnen. Nachdem dies jedoch bereits im zweiten Abschnitt ausführlich entwickelt wurde, so brauche ich hier kein Wort darüber zu verlieren. Es genügt, konstatiert zu haben, daß die Einmaleinstabellen eine doppelte Aufgabe oder Funktion erfüllen.

Von dem zweifachen Sinne, in welchem das Einmaleins Gegenstand des Unterrichts sein kann.

Es sind sonach zwei Anlässe, welche die Behandlung und Einübung der Einmaleinstabellen in unsern Schulen notwendig machen. Der erste und nächste liegt im Gegenstand selbst; das Einmaleins ist an sich und abgesehen von seiner Anwendung im Rechnen wertvoll und interessant. Der zweite Anlaß aber, der noch viel zwingender ist, ergibt sich aus der unendlich wichtigen Rolle, welche dasselbe im Rechnen spielt.

Das Einmaleins ist daher auch in zweifach verschiedenem Sinne Objekt des Unterrichts, nämlich

1) als Selbstzweck; es wird gelehrt, um die rasche, plötzliche, momentane Lösung der Tausende von Aufgaben, die ihm unmittelbar angehören, zu ermöglichen;

2) wird es gelehrt als Mittel zum Zweck. Der Zweck aber, dem es dabei untergeordnet wird und den es zu fördern hat, heißt: Rechnen.

Es ist selbstverständlich, daß der Lehrer dem Schüler das Einmaleins zuerst überhaupt geben muß, ehe er ihn in der Übertragung und Anwendung desselben auf das Rechnen unterweisen kann.

Zuerst Kenntnis und Verständnis des Einmaleins, dann erst seine Verwertung. Zuerst das Einmaleins als Selbstzweck, darauf erst als Mittel zum Rechnen. Diese Reihenfolge der beiden Ziele ist die allein naturgemäße, die allein methodische. Der Lehrer wird unsern Gegenstand zunächst so behandeln, als wollte er nichts anderes erreichen, als eben die genaue Kenntnis desselben und als würde er dies als seine einzige und ausschließliche Aufgabe betrachten. Erst dann, wenn sämtliche Ergebnisse unserer Tabellen von allen Schülern, vom begabtesten wie vom schwächsten, verstanden und beherrscht werden, mag er daran gehen, ihnen zu zeigen, wie man dieselben zur Ermittelung größerer Resultate verwerten kann oder mit einem andern Ausdruck, wie man mit ihnen zu rechnen vermag.

Von dem verschiedenen Aufbau der einzelnen Reihen.

Die Reihen des Einmaleins können verschieden sein in ihrer Anordnung, in ihrem Bau und zwar sind es vor allem zwei Möglichkeiten, welche wir ins Auge zu fassen haben. Entweder geben beim Aufbau der Reihen Zahl und Spezies in gleicher Weise den obersten Gesichtspunkt, die Norm, die Richtschnur ab, oder es werden die Spezies ausschließlich berücksichtigt und darüber die Rechte der Zahl verkümmert. Außer diesen beiden Eventualitäten könnten wir noch eine dritte unterscheiden, nämlich jene, wornach die Zahl über der Spezies dominiert und die vier Grundrechnungsarten sich um jede einzelne Zahl besonders gruppieren, also jene, welche in der Grube'schen Methode zur Verwirklichung kam; da sie aber nicht zu Reihen führt, sondern zur Bildung von Konglomeraten, die sich aus dem Verschiedensten zusammensetzen und wegen ihrer inneren Mannigfaltigkeit und ihres bunten Vielerlei sich nicht zum Memorieren eignen, so werden wir hier diese Möglichkeit ignorieren und wollen uns nur mit den beiden ersteren beschäftigen.

Bei der Konstruktion unserer Reihen können wir also Zahl und Spezies in gleicher Weise und ohne daß die eine oder andere zurückgesetzt würde, berücksichtigen; das ist die eine Möglichkeit, welche wir hier näher betrachten wollen. — Die Spezies soll zu ihrem Rechte kommen; wir werden darum unsern Stoff, den vier Grundrechnungsarten entsprechend, auf vier Tabellen verteilen, nämlich auf eine Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionstabelle. — Aber auch auf die einzelne Zahl als solche muß Rücksicht genommen werden. Dies kann offenbar nur dadurch geschehen, daß wir innerhalb einer jeden Spezies zuerst nur die 1 oder 2, darauf nur die 3, dann nur die 4 u. s. w. bis zur 10, und zwar jedesmal vollständig abwandeln, daß wir also jeder einzelnen Grundzahl eine besondere Reihe anweisen, die erste Reihe den Ergebnissen der 1, die zweite jenen der 2, die dritte denjenigen der 3 u. s. w. — Das Einmaleins erhält dadurch folgende Gestalt:

I. Additionstabelle.

1 und 1 ist 2	1 und 2 ist 3
2 „ 1 „ 3	2 „ 2 „ 4
3 „ 1 „ 4	3 „ 2 „ 5
4 „ 1 „ 5 ꝛc.	4 „ 2 „ 6 ꝛc.

II. Subtraktionstabelle.

1 weniger 1 ist 0	2 weniger 2 ist 0
2 „ 1 „ 1	3 „ 2 „ 1
3 „ 1 „ 2	4 „ 2 „ 2
4 „ 1 „ 3 ꝛc.	5 „ 2 „ 3 ꝛc.

III. Multiplikationstabelle.

1 mal 2 ist 2	1 mal 3 ist 3
2 " 2 " 4	2 " 3 " 6
3 " 2 " 6	3 " 3 " 9
4 " 2 " 8 ꝛc.	4 " 3 " 12 ꝛc.

IV. Divisionstabelle.

1. Enthaltensein.

2 in 2 ist 1 mal	3 in 3 ist 1 mal
2 " 4 " 2 "	3 " 6 " 2 "
2 " 6 " 3 " ꝛc.	3 " 9 " 3 " ꝛc.

2. Verteilen.

Der 2te Teil von 2 ist 1	Der 3te Teil von 3 ist 1
" 2te " " 4 " 2	" 3te " " 6 " 2
" 2te " " 6 " 3 ꝛc.	" 3te " " 9 " 3 ꝛc.

Diese Darstellungsweise, welche aber, nebenbei bemerkt, nicht erst von mir erfunden wurde, eignet sich vorzüglich zur ersten Einführung in das Einmaleins und unterscheidet sich vorteilhaft von der älteren Tabellenform, welche auf unserer zweiten Möglichkeit beruht, nämlich auf jener, die allein auf die Spezies Bezug nimmt und darum notwendig zu nachfolgenden Reihenbildungen führt.

Das Einsundeins.

1 und 1 ist 2	2 und 1 ist 3
1 " 2 " 3	2 " 2 " 4
1 " 3 " 4	2 " 3 " 5
1 " 4 " 5 ꝛc.	2 " 4 " 6 ꝛc.

Das Einsvoneins.

1 von 1 bleibt 0	2 von 2 bleibt 0
1 " 2 " 1	2 " 3 " 1
1 " 3 " 2	2 " 4 " 2
1 " 4 " 3 ꝛc.	2 " 5 " 3 ꝛc.

Das Einmaleins.

2 mal 1 ist 2	3 mal 1 ist 3
2 " 2 " 4	3 " 2 " 6
2 " 3 " 6 ꝛc.	3 " 3 " 9 ꝛc.

Das Einsineins.

2 in 2 geht 1 mal	3 in 3 geht 1 mal
2 " 4 " 2 "	3 " 6 " 2 "
2 " 6 " 3 " ꝛc.	3 " 9 " 3 " ꝛc.

Doch ist von diesen vier Tabellen nur die letzte (das „Einsineins") ganz zu verwerfen. Die ersten drei dagegen, (das „Einsundeins",

„Einsvoneins" und „Einmaleins") empfehlen sich prächtig für das Zifferrechnen. Besonders passend ist hier die Subtraktionsform „2 von 2 bleibt 0, 2 von 3 bleibt 1" u. s. w. Aber auch die eigentümliche Aneinanderreihung der Multiplikationsergebnisse „2 mal 2 ist 4, 2 mal 3 ist 6, 2 mal 4 ist 8" u. s. f., muß, wenn wir dabei lediglich an das Rechnen denken, als höchst zweckmäßig bezeichnet werden, da ja häufig eine ganze Reihe von Ziffern durch ein und denselben Faktor unmittelbar nach einander zu vermehren ist, z. B. 2 × 15 783 624. Den alten Einmaleinstabellen (von der vierten natürlich abgesehen) darf daher nicht aller Wert abgesprochen werden, denn sie sind ja, wie wir uns überzeugt haben, die beste Einleitung und Vorbereitung für das Rechnen und zwar besonders für das Zifferrechnen. Lassen wir aus diesem Grunde in unsern Schulen das Einmaleins künftig in beiden Formen üben, also zuerst, solange wir dasselbe um seiner selbst willen lehren und so lange wir nur das klarste Verständnis und nichts weiter anbahnen wollen, in der neuen Form und später als Vorbereitung auf das eigentliche Rechnen auch in der alten.

---

5. Kapitel.

Das Bruchrechnen.

Was das Bruchrechnen seinem Wesen nach ist.

Keineswegs eine besondere Rechenart, sondern nur die Anwendung der bekannten Spezies auf Brucheinheiten. Es unterscheidet sich darum in nichts vom Rechnen mit ganzen Zahlen. Freilich führt das Teilen der Brüche zu Brüchen mit anderer Benennung, so das Halbieren des Viertels zu Achtel. Aber ist nicht auch die Hälfte eines Ganzen = $1/2$, das Drittel von 2 = $2/3$?

Daß sich im Bruchrechnen alle Spezies wiederholen müssen, die wir beim Rechnen mit Ganzen kennen gelernt haben, wird klar, wenn man bedenkt

1) daß sich auch die Bruchzahlen aus Einheiten zusammensetzen und daß sich diese von jenen ganzer Zahlen nur in der Größe, nicht aber in der Art unterscheiden,

2) daß 2 Brucheinheiten zu 2 Brucheinheiten addiert, also etwa 2 Drittel zu 2 Drittel oder 2 Hundertstel zu 2 Hundertstel ebenso gut vier gibt, wie 2 Ganze zu 2 Ganzen, sowie daß ich beim Halbieren einer Brucheinheit, etwa eines Drittels, Viertels ꝛc. ebenfalls zwei Teile erhalte, wie beim Dividieren ganzer Zahlen durch Zwei;

3) daß ich mit den Bruchheinheiten zwar alle die Operationen werde vornehmen können, welche sich an den Einheiten ganzer Zahlen vollziehen lassen, daß aber, wo für letztere die Rechenarten zum Abschluß kommen, sich notwendig auch die im Bruchrechnen möglichen Spezies erschöpfen müssen. Ich vermag Brüche zu addieren, zu subtrahieren, zu multiplizieren, zu teilen und zu zerlegen, ich vermag jedoch nichts weiteres und neues mit ihnen anzufangen.

Ferner: das Bruchrechnen ist vorzugsweise ein Rechnen mit dem Zähler. — Beweis: Die Bruchzahlen setzen sich aus Einern oder Einheiten zusammen, genau so wie die ganzen Zahlen. So besteht $^2/_3$ aus 2 Bruchheinheiten, $^3/_4$ aus 3 u. s. f. Diese Bruchheinheiten nun machen die Bruchzahl aus; sie sind es auch, welche während des Kalküls vermehrt und vermindert, zerlegt und geteilt werden, und da ja in diesen Vorgängen (Vermehren, Vermindern, Teilen 2c.) das Rechnen besteht, so sind es eben jene Bruchheinheiten, mit denen gerechnet wird. Die jeweilige Anzahl derselben ist aber ausgedrückt durch den Zähler. Daraus folgt notwendig, daß wir beim Bruchrechnen vorzugsweise mit dem Zähler werden operieren müssen.

Was das Rechnen mit Brüchen von jenem mit ganzen Zahlen unterscheiden könnte, ist allein das Resolvieren, z. B. $^5/_6 = {}^{10}/_{12} = {}^{15}/_{18} = {}^{75}/_{90}$ 2c. und das Reduzieren, z. B. $^{18}/_{24} = {}^9/_{12} = {}^3/_4$, oder, wie man es noch anders bezeichnen könnte, das Umwandeln der einen Form in eine andere äquivalente. Doch sind auch diese beiden Rechenvorgänge dem Bruchrechnen nicht ausschließlich eigen. Sie kommen vielmehr so oft zur Anwendung, als mehrsortige, mehrfach benannte Zahlen gegeben sind, also vor allem bei Maßen, Gewichten u. dgl. Und wie wir die Brüche, um mit ihnen rechnen zu können, gleichnamig machen müssen, so sind wir auch, wenn es sich um die Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division von Zentner und Pfund, Wochen und Tage, Dutzend und Stück, m und cm 2c. handelt, gezwungen, die eine Größensorte in die andere, also Zentner in Pfund, Wochen in Tage 2c. aufzulösen oder umzuwandeln. Nur Größen, deren Einheiten gleichwertig sind, wie 100 Pfund und 12 Pfund, 42 Tage und 6 Tage, 85 cm und 234 cm, $^3/_{65}$ und $^{27}/_{65}$ dürfen zur Summe vereinigt werden. Das Resolvieren und Reduzieren sind also, wie gesagt, wiederum keine Spezies, die dem Bruchrechnen ausschließlich eigen wären. Nichts destoweniger spielen sie hier eine ungleich wichtigere Rolle, als anderswo; denn sie machen das Bruchrechnen überhaupt erst möglich, sie kommen bei demselben fortwährend in Anwendung und geben ihm darum auch ein eigentümliches, charakteristisches Gepräge.

Gegen die sogenannte Multiplikation mit Brüchen.

Beispiele: $1/2$ mal $1/4$ ist $1/8$; $2\,1/2$ mal 6 ist 15.

Was man seither unter der Multiplikation mit Brüchen verstanden hat — unsere beiden Beispiele sagen es viel kürzer, bezeichnender, anschaulicher, als es die längste Definition zu geben vermöchte.

Fassen wir das erste Exempel: $1/2$ mal $1/4 = 1/8$, schärfer in's Auge! — Indem ich das Viertel mit $1/2$ vermehre, erhalte ich eine Zahl, die kleiner ist als jede der beiden Faktoren, also kleiner als $1/2$ und kleiner als $1/4$. Aber verdient dieser Rechenvorgang wirklich die Bezeichnung „Multiplizieren"? Etwas $1/2$ mal nehmen heißt doch: teilen, vermindern, nicht aber: vervielfachen, vermehren. Der Begriff des Halbierens ist er nicht wesentlich verschieden von dem des Zweimalnehmens, des Multiplizierens? Wenn das Halbieren bei Brüchen ein Multiplizieren sein soll, wie kann man dann das Halbieren ganzer Zahlen (z. B. $1/2$ von $36 = 18$) als ein Dividieren erklären? Ist es nicht ein und derselbe Vorgang, ob das, was ich in zwei Stücke trenne, eine ganze Zahl oder ein Bruch ist?

$1/2$ von 6 ist 3; das nennt man Division.

$1/2$ mal $1/4$ (oder richtiger $1/2$ von $1/4$, nämlich die Hälfte, der zweite Teil des Viertels) ist $1/8$; das soll eine Multiplikation sein. Und doch wird bei dem Halbieren des Viertels kein anderer Akt vollzogen, als bei jenem der Zahl 6.

Analysieren wir nun auch das zweite Beispiel: $2\,1/2$ mal 6 ist 15. — Wenn ich 2 mal 6 nehme, so habe ich multipliziert, wenn ich hernach den 2. Teil oder die Hälfte von 6 suche, so dividiere ich. Der Ausdruck $2\,1/2$ mal 6 dagegen soll bloß eine Multiplikation, nicht aber auch eine Division andeuten, obschon ich nur dadurch zum Resultat, nämlich zur Zahl 15, komme, daß ich die 6 zuerst mit 2 multipliziere, sodann durch 2 dividiere und endlich die beiden Ergebnisse zusammenzähle, also Multiplikation, Division und Addition vereinige.

Gewiß, das sogenannte Multiplizieren mit Brüchen ist, bei Licht betrachtet, nichts als ein Dividieren und was man seither als ein Vermehren mit gemischten Zahlen bezeichnet hat, erweist sich, wie sich aus unserem zweiten Beispiel ersehen läßt, als ein zusammengesetztes Verfahren, das sowohl Multiplikation wie Division und Addition in sich begreift.

Es gibt nur eine Art des Multiplizierens und in dieser einen Art ist der Multiplikator jederzeit eine ganze, nie und nimmer aber eine gebrochene oder gemischte Zahl.

Man hat bis jetzt nicht scharf genug zwischen den zwei wesentlich verschiedenen Funktionen der Ziffer (Zahl) unterschieden. Das

muß in Zukunft geschehen. Denn nur dadurch wird die Multiplikation mit Brüchen als eine besondere Spezies und für immer beseitigt, wird das Dunkel, in welches Multiplizieren und Dividieren seither gehüllt waren, vollständig aufgehellt.

In Folgendem gebe ich eine gedrängte Darstellung des wahren Sachverhalts.

Die Ziffern werden für zwei grundverschiedene Dinge gebraucht, nämlich für Größen und für Rechenakte; im ersten Falle bezeichnen sie die jeweilige Menge der Gegenstände, im zweiten bestimmen sie die Art der vorzunehmenden arithmetischen Operation, sie sagen uns, ob und wie zu multiplizieren oder ob und wie zu dividieren ist.

Beispiele: 2 mal 365; $^2/_3$ von 3726.

a) Das Wörtchen „mal" zeigt an, daß überhaupt multipliziert, d. i. die Zahl 365 zu sich selbst gezählt werden soll,

b) die Ziffer 2 dagegen bezeichnet die besondere Art des Multiplizierens, sie sagt, daß wir uns den Multiplikanden 365 als zweimal gesetzt zu denken haben und ihn darum einmal zu sich addieren müssen.

Der Ausdruck „$^2/_3$ von 3726" bestimmt

a) daß die Zahl 3726 in drei Stücke zu teilen, also zu dividieren ist und

b) daß von diesen drei Teilen nur zwei behalten werden sollen.

Zur Bezeichnung der Multiplikationsakte bedient man sich ausschließlich der Ziffern der ganzen Zahlen. Zu jener der Division hingegen verwendet man bald die ganze Zahl, z. B. 2/327 *M.*, 4/7 200 hl (d. h. der 2. Teil von 327 *M.*, der 4. Teil von 7 200 hl), bald die Bruchzahl, z. B. $^1/_3$ von 420 *M.*, $^2/_7$ von 1 400 *M.*, $^{13}/_{25}$ von 6 000 hl.

Nach meinem Dafürhalten wird der Divisor am besten dann durch die Ziffern ganzer Zahlen ausgedrückt, wenn es sich um das bloße Teilen ohne nachfolgendes Vermindern handelt. Wird aber nicht bloß geteilt, sondern zugleich auf einen oder auf mehrere Teile reduziert, so sind die Bruchziffern am Platz. Denn der Divisor hat dann ein Zweifaches anzugeben, nämlich 1) in wie viele Teile das Ganze überhaupt zerstückt und 2) wie viel von diesen Teilen behalten werden soll. Darum kann er auch nur durch zwei Ziffern, die man in Bruchform anschreiben mag, aber vielleicht ebenso gut auch in einer anderen Weise darstellen könnte, vollständig ausgedrückt werden. Die untere Ziffer des Divisors, d. i. der Nenner unseres scheinbaren Bruches gibt dann die ganze Anzahl der zu machenden Teile an, die obere Ziffer des Divisors, der Zähler, sagt, auf wie viele Teile das Ganze zurückgeführt (reduziert) werden muß.

Unsere obigen Beispiele wären also auf folgende Art zu schreiben und zu erklären: $^1/_3$ / 420 M.; die 420 M. sollen in drei gleiche Teile geteilt und davon soll einer behalten werden. $^2/_7$ / 1 400 M.; diese Summe soll auf 7 Häufchen gebracht und bis auf 2 Häufchen weggegeben werden. $^{13}/_{25}$ / 6 000 hl; mit den 6 000 hl sollen 25 Fässer gefüllt und von diesen sollen 13 zurückbehalten werden.

Eine zweite Ursache der irrtümlichen Meinungen über die sogenannte Multiplikation mit Brüchen ist darin zu suchen, daß man sich seither nicht klar gemacht hat, für welch' verschiedene Dinge die Bruchzahl verwendet wird.

Letztere kann stehen

1) für einen konkreten, zerstückten Gegenstand oder für irgend welche Teile desselben (Bruch im ursprünglichen Sinne des Wortes), Beispiele: $^3/_4$ m, $^3/_4$ kg, $^3/_4$ Stunde, $^3/_4$ Stück ꝛc.

2) für ein Zahlenverhältnis oder richtiger für eine Enthaltenseinsbestimmung, z. B. 16 ist in 12 dreivierteimal enthalten,

3) als Divisor bei der Division im Sinne des Teilens. Beispiel: $^3/_4$ / 27 M. Hier zeigt der Bruch „$^3/_4$“ nicht eine fertige, gegebene Größe an, er steht überhaupt nicht für eine Sache, er ist vielmehr der Ausdruck für die Forderung, die 27 M. sollen in vier gleiche Teile zerlegt und sodann auf drei derselben gebracht werden.

Es sind der Bruchzahl sonach drei verschiedene Funktionen zugewiesen; sie hat entweder eine konkrete Größe (Sache) zu bezeichnen oder ein konkretes Zahlenverhältnis (Zahlenenthaltensein) auszudrücken oder endlich den Divisionsakt anzudeuten.

Eine dritte Ursache, welche unsere Methodiker daran hinderte, das Trügerische der sogenannten Multiplikation mit Brüchen zu durchschauen, besteht darin, daß sie von dem Wahne befangen waren, das Bruchrechnen könne eine eigentümliche und neue Spezies begründen. Diese Einbildung, welche eine notwendige Folge der unklaren Vorstellungen über die wahre Natur der Multiplikation, Division und des Bruchrechnens ist, fällt durch unsere Untersuchungen in ihr Nichts zurück. Die Lehrbuchverfasser der Zukunft werden nur eine Multiplikationsart kennen, nämlich jene, in welcher der Multiplikator eine ganze Zahl ist; die Multiplikation mit Brüchen wird gänzlich in Vergessenheit kommen und der Lehrer wird an Stelle der bisherigen konfusen Definitionen des Vermehrens seinen Kindern folgende verständliche Erklärung geben: „Multiplizieren heißt vervielfachen oder eine Zahl wiederholt zu sich addieren“. Das Bruchrechnen aber, das bis zur Stunde ein wahres Schulmeisterkreuz war, wird durch Ausmerzung dieses Auswuchses, sowie durch eine rationelle Um- und Neugestaltung des Lehrverfahrens zu einem verhältnismäßig leichten, einfachen und dankbaren Unterrichtsgegenstand werden.

Der Doppelbruch.

Unsere Rechenmethodiker unterscheiden zwischen einfachen Brüchen und Doppelbrüchen. Doch hat diese Distinktion nicht den geringsten Wert, da der Doppelbruch nichts ist, als eine eigentümliche und zwar höchst überflüssige und unnötige Divisionsform und da die sogenannte Umwandlung jenes Bruches in einen einfachen auch nichts anderes bedeutet, als eben die thatsächliche Ausführung der Division.

Beispiele: $\frac{1/2}{10}$; $\frac{5}{1/2}$; $\frac{2/3}{5/6}$.

In diesen drei komplizierten Brüchen stellt die untere Zahl offenbar den Divisor, die obere den Dividenden vor. Aber wozu diese künstliche, verschrobene, unnatürliche Darstellungsweise? Aus welchem Grunde weicht man hier vom Gebräuchlichen ab? Warum bringt man nicht die herkömmliche Divisionsform in Anwendung? Weshalb also setzt man die drei Aufgaben nicht auf folgende Weise an: $1/2 : 10$; $5 : 1/2$; $2/3 : 5/6$ oder auch, was ich vorziehen würde, auf diese Art: $10 \,/\, 1/2$; $1/2 \,/\, 5$; $5/6 \,/\, 2/3$?

Der erste Doppelbruch $\frac{1/2}{10}$ wäre nach meiner Auffassung als eine Aufgabe im *bloßen* Teilen, nämlich als eine Division ohne nachfolgende Größenverminderung zu betrachten und müßte gelesen werden: „$1/2$ geteilt in 10 Teile gibt welche Art von Bruchstücken?" Das Ergebnis würde lauten: „Zwanzigstel".

Der zweite Doppelbruch $\frac{5}{1/2}$ ist zu lesen: „Wie viel beträgt die Hälfte von 5?" und führt, wenn derselbe in einen einfachen Bruch umgewandelt oder mit einem anderen Ausdruck, wenn die Division thatsächlich vollzogen wird, zu dem Resultat „$5/2$ oder $2\,1/2$".

Der letzte Doppelbruch endlich $\frac{2/3}{5/6}$ gehört zweifelsohne zur Division im Sinne der Reduktion auf mehrere Teile und fordert: „Berechne, wie viel $5/6$ von $2/3$ macht!" Ich würde die Aufgabe so lösen: „$1/6$ von $2/3$ ist $2/18$ oder $1/9$; $5/6$ von $2/3$ ist 5 mal so viel, also $5/9$".

Zum Schlusse wiederhole ich nochmals, daß der Doppelbruch, wie ich fest überzeugt bin, nur eine besondere, aber zwecklose und entbehrliche Darstellungsform der Division ist und daß es wohl am klügsten wäre, damit vollständig aufzuräumen.

---

6. Kapitel.

Das Rechenpensum der zwei letzten Schuljahre.

Wie der verehrliche Leser schon aus der Einleitung zu meinem Buche (s. „Zur Reform des Rechenunterrichts", 1. Abteilung, S. 15 und 16) entnehmen konnte, gliedert sich mein Lehrgang in drei Kurse:

1. in den Zählkurs (1. und 2. Schuljahr),
2. in den Kurs des elementaren oder grundlegenden Rechnens (3. bis 5. Schuljahr),
3. in den Kurs des praktischen oder angewandten Rechnens (6. und 7. Schuljahr).

Daß zwischen einem Zähl- und einem eigentlichen Rechenkurs unterschieden werden muß, habe ich schon früher gezeigt; es erübrigt mir also noch, die Notwendigkeit des dritten oder praktischen Kurses, welche weniger leicht eingesehen werden kann, zu beweisen.

Zugegeben muß werden, daß der Schüler bereits durch den Kurs des elementaren Rechnens sämtliche Spezies, die er einst wird gebrauchen müssen, kennen lernt, daß also die letzten zwei Schuljahre in dieser Beziehung nichts Neues zu bringen vermögen. Aber mit der Kenntnis der Rechenarten und mit der Fertigkeit in der Handhabung derselben ist es noch nicht abgethan. Es kann jemand der beste Rechner sein, d. h. die größte Gewandtheit in der Ausführung der möglichen Zahlenoperationen (Addieren, Multiplizieren rc.) besitzen und doch ratlos dastehen, sobald es etwas Praktisches zu lösen gibt. Das Leben stellt die Aufgaben, ohne die Rechenspezies zu nennen. Ob addiert, ob subtrahiert, ob diese oder jene Rechenart angewendet werden soll, das herauszufinden, bleibt dem Einzelnen überlassen. Aber nur, wenn ich das Leben, wenn ich die wichtigsten Verhältnisse des geschäftlichen Verkehrs kenne, vermag ich den Lösungsgang einer derartigen Aufgabe mit Sicherheit zu bestimmen. Daraus folgt, daß zum Rechenkursus noch ein Sachkursus gefügt werden muß, ein Kursus, der den Schüler einführt in das Verständnis unserer allgemeinsten Verkehrsverhältnisse, der ihn vertraut macht mit dem Wichtigsten aus Handel und Gewerbe, der ihn anleitet zur selbständigen Beurteilung und Lösung von Rechenexempeln, wie das werkthätige Leben sie stellt. Bei diesem dritten Kurse handelt es sich weniger um Erhöhung der Fertigkeit im Zählen und Rechnen, als vielmehr um die Gewinnung bestimmter Realeinsichten.

Meine Unterscheidung zwischen dem elementaren und dem praktischen Rechenkurs resultiert sonach mit zwingender Notwendigkeit aus einem thatsächlich vorhandenen Bedürfnis und ist nichts weniger als willkürlich. Jeder von unsern drei Kursen hat ein besonderes

Gebiet, einen ihm ausschließlich oder doch vorzugsweise eigentümlichen Stoff. Der Zählkurs befaßt sich nur mit dem Zählen und mit der Auffindung und Einübung des Einmaleins. Der elementare Rechenkurs behandelt die möglichen Spezies; sein Objekt ist: mechanisches Rechnen, sein Ziel: Rechenfertigkeit. Der Kursus des angewandten Rechnens endlich hat Realkenntnisse, Realeinsichten zum Gegenstand; sein Ziel ist: Gewandtheit in der richtigen, sachgemäßen Beurteilung praktischer Aufgaben.

Zwischen diesen drei Kursen besteht ein kausaler Zusammenhang; der vorausgehende verhält sich zu dem ihm folgenden immer wie die Bedingung zu dem Bedingten, wie der Grund zu dem Begründeten. Der Zählkurs macht den Rechenkurs erst möglich und letzterer bildet wiederum die Voraussetzung für den praktischen Kurs. Es ist Notwendigkeit, System in unserer Abstufung. Wie sich bei einer Kette Glied an Glied reiht, so fügt sich in unserm Lehrgange ein Kurs an den andern. Der Zählkurs ist der Ausgangspunkt, das oberste Glied der Kette, an diesen schließt sich eng der Kurs des elementaren und an letzteren wieder jener des praktischen Rechnens an.

V. Abschnitt.

Die Verhältnisrechnung und ihre Lösung durch Schluß und Ansatz.

1. Kapitel.

Die wahre Natur der Verhältnisrechnung.

Unterscheidung zwischen Sach- und Größenverhältnissen.

Die Begriffe: Ware und Preis, Arbeiter und Zeit ꝛc. sind so innig mit einander verbunden, daß, wenn der eine gedacht wird, notwendig auch der andere vorgestellt werden muß. Sie stehen in einem sachlichen Zusammenhang, in einem Verhältnis. Es ist klar, daß nur bei konkreten Dingen von einem Verhältnis in diesem Sinne die Rede sein kann, nicht aber bei reinen, d. i. unbenannten Zahlen. Denn keine Zahl ist so an die andere gekettet, daß die Vorstellung der ersteren auch jene der letzteren wecken müßte. Wenn ich die 2 im Sinne habe, so muß ich nicht zugleich an die 5 denken und wenn ich mir die 5 einbilde, so brauche ich mir nicht auch die 2 klar vorzustellen. Der Begriff des sachlichen Verhältnisses gehört darum nicht dem Gebiete der reinen Zahl an; er stammt vielmehr von außen und hat sich abgezogen aus Wahrnehmungen der Sinnenwelt. Da er nun kein arithmetischer, kein Zahlbegriff ist, so kann er selbstverständlich auch nicht durch Zahlen erläutert oder begründet werden. Was es heißt, zwischen Ware und Preis, Arbeiter und Zeit ꝛc. besteht ein Zusammenhang, ein Verhältnis, das vermag ich dem Schüler allein durch Berufung auf irgend welche konkrete Thatsachen begreiflich zu machen, keineswegs aber am Beispiel reiner Zahlen.

Außer dem Sachverhältnis (Zusammenhang zwischen Ware und Preis ꝛc.) haben wir in jeder Verhältnisaufgabe auch noch ein bestimmtes Größenverhältnis vor uns und zwar entweder das gerade (direkte) Größenverhältnis, wenn das Anwachsen des einen Gliedes (Ware) notwendig eine entsprechende Zunahme des anderen (Preis) bedingt oder das umgekehrte (indirekte), wenn die Vermehrung der einen Sache die Verminderung der anderen fordert. Aber diese

Größenverhältnisse sind, wie ich weiter unten ausführlich zeigen werde, nur eine gesetzmäßige Folge der gegebenen Sachverhältnisse und können allein aus letzteren verstanden werden.

Es war daher von Grund aus verfehlt, wenn die seitherige Methode bei der Einführung in die Verhältnisrechnung mit der reinen, d. i. unbenannten Zahl begann, wenn sie an reinen Zahlen den Begriff des Verhältnisses entwickeln, an reinen Zahlen die eigentümliche Natur unserer Rechenart darthun wollte.

Eine Verhältnisaufgabe in unbenannten Ziffern hat, so lange wir nicht dabei an konkrete Dinge, also etwa an Ware und Preis, oder an Arbeiter und Zeit, oder an Kapital und Zins u. dgl. denken, überhaupt keinen verständlichen Sinn.

Beispiel: 2 : 5 = 4 : 10.

In dieser Zahlenzusammenstellung kann bereits der erste Ausdruck „2 : 5“ (d. i. 2 verhält sich zu 5) beanstandet werden, denn 2 ist zwar in 5 enthalten, aber die Zahlen 2 und 5 bilden deshalb noch kein Verhältnis, sie sind ja nicht gesetzmäßig an einander gekettet. Ebenso könnte man den zweiten Ausdruck „4 : 10“ anstreiten, da auch die 4 und 10 in keinem notwendigen Zusammenhang stehen. Endlich vermöchte man der ganzen Gleichung ihre Berechtigung abzusprechen. Man könnte sagen: Es ist nicht einzusehen, weshalb dem Ausdruck „2 : 5“ der andere „4 : 10“ entgegengesetzt werden soll; diese Zahlenkombination scheine nichts als ein Werk der bloßen Willkür, der tändelnden Laune zu sein.

Sachverhältnisse.

Zwei Arten von Sachverhältnissen sind es, mit welchen wir es bei Betrachtung der Verhältnisrechnung zu thun haben:

1. Feste, unwandelbare, unverschiebbare Verhältnisse. Zu ihnen gehört der Zusammenhang von Ware und Preis, Leistung und Lohn, Kapital und Zins 2c. Diese Dinge sind so miteinander verknüpft, daß, wenn die eine Sache zu- oder abnimmt, notwendig auch die andere zu- oder abnehmen muß. Dem größeren Warenquantum entspricht der höhere Preis, der größeren oder länger anhaltenden Arbeit der größere Lohn, dem größeren Kapital der reichlichere Zinsertrag. Der Zusammenhang zwischen Ware und Preis, Arbeit und Lohn, Kapital und Zins ist eben der denkbar innigste. Darum muß sich mit der einen Größe (Ware) gleichzeitig auch die andere (Preis) verändern und zwar in gleichem Maße.

2. Lockere, wandelbare, verschiebbare Verhältnisse, z. B. Arbeiter und Zeit, Kapital und Zeit, Zinsfuß und Kapital, Länge und Breite. Diese Dinge stehen zwar ebenfalls in einem untrennbaren Zusammenhang, somit in einem sachlichen Verhältnis. Denn jeder Arbeiter braucht irgend eine Zeit, jedes Kapital liegt zu

irgend einem Zinsfuß aus, jeder Länge entspricht irgend eine Breite. Aber dieser Zusammenhang ist dennoch nicht jener innige, feste, unwandelbare, den wir bei den Verhältnissen der ersten Art entdeckt haben. Die Vermehrung oder Verminderung der einen Sache (z. B. der Zahl der Arbeiter) bedingt nicht notwendig auch die Vermehrung oder Verminderung der anderen (z. B. der täglichen Arbeitszeit). Wenn in einer Fabrik mehr Arbeiter, als seither darin beschäftigt waren, angestellt werden, so kann der Fabrikant die tägliche Arbeitszeit herabsetzen, aber er muß es nicht notwendig, er kann sie unverändert lassen, ja er kann sie sogar verlängern. Die Veränderungen der beiden Größen sind hier von einander völlig unabhängig. Darum lassen sich auch nicht, wie bei den unwandelbaren Verhältnissen, verlässige Schlüsse ziehen. Für die Theorie des Rechnens wäre unser zweites Sachverhältnis wertlos, würde es nicht das umgekehrte Größenverhältnis ermöglichen.

Größenverhältnisse.

Entsprechend den zwei Sachverhältnissen müssen wir auch zwei Größenverhältnisse unterscheiden: 1. das gerade oder direkte und 2. das umgekehrte oder indirekte. Was man unter ersterem zu verstehen hat, ist bekannt. Ich will nur bemerken, daß dasselbe aus dem unwandelbaren Sachverhältnis (Zusammenhang zwischen Ware und Preis, Arbeit und Lohn, Kapital und Zins ꝛc.) erwächst und mit ihm gewissermaßen identisch ist. Die eigentümliche Natur des umgekehrten Größenverhältnisses dagegen wurde, so viel ich weiß, noch in keinem Lehrbuch der Arithmetik völlig klar gelegt. Meine nun folgenden Ausführungen dürften darum mehr oder weniger neu sein.

Entstehung des umgekehrten Größenverhältnisses. — Wenn irgend eine dritte, genau bestimmte Größe durch zwei andere Größen, welche wie Arbeiter und Zeit, Kapital und Zinsfuß, Länge und Breite ꝛc. in einem wandelbaren Sachverhältnis stehen, hervorgebracht oder aufgezehrt werden soll, so erhalten wir das sogenannte „umgekehrte Größenverhältnis“.

Erstes Beispiel: 4 Arbeiter bringen einen Graben in 6 Tagen fertig, wie lange werden 3 Arbeiter dazu brauchen?

Zergliederung der Aufgabe: Arbeiter und Tage stehen in einem sachlichen Zusammenhang, in einem Verhältnis. Dieses reale Verhältnis aber ist ein wandelbares. Die eine Größe (Anzahl der Arbeiter) kann sich ändern, während die andere (Arbeitszeit) sich gleich bleibt. Aus der Thatsache, daß 4 Arbeiter 6 Tage beschäftigt sind, folgt weder, daß 3 Arbeiter länger, noch daß sie kürzere Zeit, noch daß sie gleich lang arbeiten werden. Es läßt sich überhaupt kein

verlässiger Schluß daraus ziehen. Unsere Aufgabe enthält aber außer Arbeiter und Tage noch eine dritte Größe, die durch beide Faktoren hervorgebracht werden soll. Es ist dies die vorgeschriebene Arbeitsleistung, nämlich der Graben. Die 3 Arbeiter sollen dieselbe Arbeit zu Ende bringen, welche von 4 Arbeitern in 6 Tagen ausgeführt wird.

Das zu bewältigende Arbeitsquantum bleibt sich in beiden Fällen gleich. Da nun der eine Faktor (Arbeiter) vermindert wurde, so muß der andere (Tage) notwendig vermehrt werden. Der Schluß, nach welchem die Lösung unserer Aufgabe zu vollziehen ist, lautet darum: Wenn 4 Arbeiter den Graben erst in 6 Tagen fertig bringen, so werden 3 Arbeiter mehr als 6 Tage dazu brauchen.

Zweites Beispiel: Gibt A täglich 4,50 *M.* aus, so reicht seine Barschaft 28 Tage; wie lange wird er damit auskommen, wenn er täglich 5,40 *M.* verbraucht?

Zergliederung der Aufgabe: Wie in unserem ersten Rechenbeispiele durch Vereinigung der beiden Faktoren (Arbeiter und Tage) eine dritte Größe hervorgebracht wurde, so soll in vorstehender Aufgabe umgekehrt eine dritte, ein für allemal bestimmte Größe aufgebraucht, konsumiert werden. Die „Ausgabe per Tag“ und irgend eine „Anzahl von Tagen“ stehen in einem realen Zusammenhang, in einem sachlichen Verhältnis. Dasselbe ist aber ebenfalls ein wandelbares. Aus dem Umstande, daß ich auf einmal plötzlich mehr ausgebe, als früher, folgt noch lange nicht, daß nun mein Geld auf weniger Tage reichen wird; denn mein Vermögen könnte ja im Verhältnis zu den Ausgaben anwachsen. Anders verhält es sich natürlich, wenn, wie in unserem Beispiele, die Bareinnahme als konstant, sich fortwährend gleichbleibend gesetzt ist. Je mehr ich täglich verbrauche, auf desto kürzere Zeit wird dann mein Geld reichen, je weniger ich per Tag verausgabe, desto länger werde ich damit auskommen. Der Schluß, welchen ich der Berechnung unseres Beispiels zu grunde legen werde, heißt deshalb: Bei einer täglichen Ausgabe von 4,50 *M.* reicht A 28 Tage; braucht er täglich 5,40 *M.*, so wird er mit seinem Gelde in einer kürzeren Frist fertig.

Die drei Stücke eines umgekehrten Größenverhältnisses. — Bei Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnisse kommen drei Dinge in Betracht, nämlich die beiden Größen, welche durch einen realen Zusammenhang mit einander verknüpft sind, z. B. Arbeiter und Tage, und dann eine dritte Größe, welche hervorgebracht oder aufgebraucht werden soll, z. B. Graben.

Das Verhältnis der ersten und zweiten Größe (Arbeiter und Tage) ist ein veränderliches, wandelbares und zwar wird jene Wandelbarkeit zunächst als eine unbeschränkte gesetzt. Ich denke mir also: die Zahl der Arbeiter könnte beliebig groß, aber auch beliebig klein sein;

das Werk könnte möglicherweise an einem Tage, aber ebenso gut erst nach vielen Wochen oder Monaten fertig werden. In dieser Beziehung vermögen meine Gedanken nach Willkür ab- und auszuschweifen; es ist ihnen noch keine Notwendigkeit, kein Gesetz aufgezwungen.

Erst dadurch, daß in der Aufgabe gesagt ist: es solle diese oder jene bestimmte Sache produziert oder konsumiert werden, erhält mein Kalkül einen Ausgangspunkt, sowie eine genau bestimmte Richtung. Ich sehe dann klar ein, daß ich in dem Grade, als das eine Glied des Verhältnisses (Arbeiter) zu- oder abnimmt, das andere (Tage) umgekehrt vermindern oder vermehren muß.

Es ist also jene dritte Größe (Graben), welche dem Hin- und Hervagieren der Gedanken ein Ende macht.

Sie ist es auch, welche das wandelbare Sachverhältnis, das zwischen den beiden ersten Gliedern der Rechnung (Arbeiter und Tage) besteht, zu einem umgekehrten Größenverhältnis umgestaltet.

Was nun die Natur unserer dritten Größe anbelangt, so sei Folgendes bemerkt: Diese Größe muß als eine konstante, ein für allemal bestimmte gedacht werden. Es ist aber nicht notwendig, daß sie in der Aufgabe in Zahlenwerten veranschlagt wird. Wenn wir auch in unserem ersten Rechenexempel die Größe des zu fertigenden Grabens genau angegeben hätten, wenn wir also gesagt hätten: der Graben soll 42 m lang, $1^1/_2$ m tief und 1 m breit werden, so würden diese Zahlangaben für die Berechnung doch nur überflüssig und wertlos gewesen sein, sie würden nicht den geringsten Einfluß auf den Kalkül geübt haben. Es genügt in Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnisse die bloße Andeutung, daß eine dritte Größe, die hervorgebracht oder vertilgt werden soll, vorausgesetzt wird; ihre genaue Bezeichnung durch Ziffern dagegen ist Luxus.

Unsere dritte Größe macht sich also nur geltend als *logisches* Element der Rechnung; *nicht aber als zahlenmäßigen oder arithmetischen Bestandteil* derselben; sie wirkt nicht als Zahl und braucht darum auch nicht in Ziffern ausgedrückt zu werden; wo dies jedoch zufällig geschehen sein sollte, da müssen wir jene Zahlangaben ignorieren, zum mindesten dürfen wir sie nicht in den Rechenansatz mit aufnehmen.

Von der Veranschaulichung der Größenverhältnisse durch Zeichnung.

Durch reine Zahlen und bloße arithmetische Operationszeichen läßt sich das Wesen der Verhältnisrechnung unmöglich klar machen, da ja Zahlen und Rechenzeichen nicht einmal den Begriff des *Verhältnisses*, d. i. des *notwendigen* realen Zusammenhangs wiederzugeben vermögen.

Anders verhält es sich mit den geometrischen Figuren. Die Linien eines Dreieckes, die Seiten eines Rechteckes, der Durchmesser und die Peripherie eines Kreises stehen in einem wirklichen, konkreten Zusammenhang, der dadurch nicht aufgehoben wird, daß ich die betreffende Figur bald größer bald kleiner zeichne. Sie stehen in einem Zusammenhang, der die Linien fest und untrennbar an einander kettet, in einem Zusammenhang, der offenbar Ähnlichkeit hat mit unseren Sachverhältnissen, nämlich mit dem innigen Verbundensein von Ware und Preis, Arbeit und Zeit 2c. Während die Zahlen nur die Größe der Dinge und nicht auch ihren sachlichen Zusammenhang, ihr Verhältnis versinnbildlichen können, vermögen geometrische Figuren beides zur Anschauung zu bringen. Daraus folgt, daß die letzteren zur Verdeutlichung der Größenverhältnisse und zur Einführung in das tiefere Verständnis unserer Rechenart sich vorzüglich eignen müssen.

Der Begriff des Verhältnisses überhaupt läßt sich veranschaulichen an der Kreislinie (Verhältnis des Durchmessers zum Umfang derselben), das gerade Größenverhältnis an den „ähnlichen Dreiecken", das umgekehrte am Rechteck und zwar speziell durch die Lehre vom gleichen Flächeninhalt bei proportionaler Veränderung der Länge und Breite.

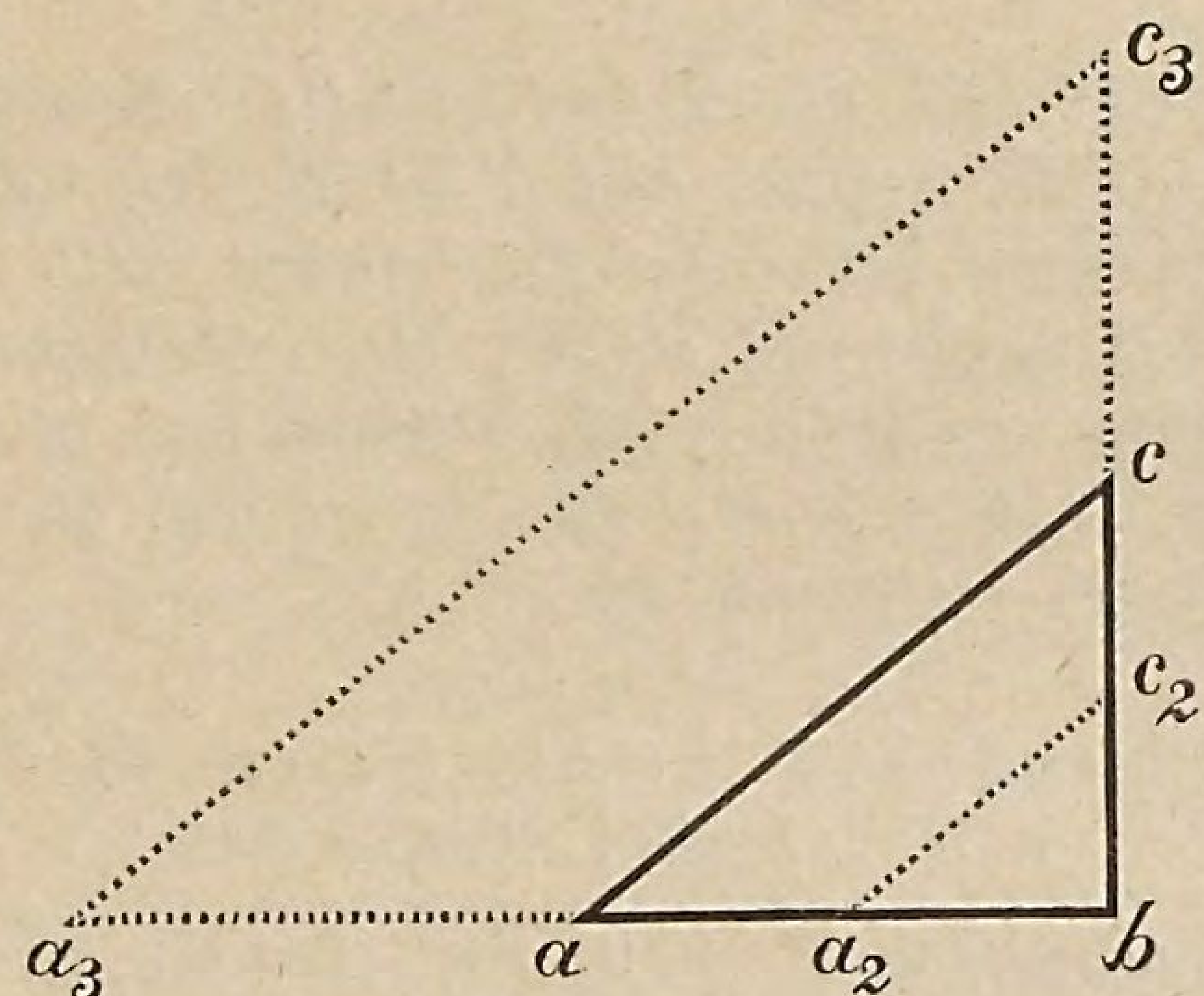
Aber die Seiten eines Drei- oder Rechteckes geben die Größen noch nicht in zahlenmäßiger Bestimmtheit, es muß daher zur Anschauung der geometrischen Linien die genaue Größenangabe durch Ziffern treten. Endlich sollen unsere Figuren Sachen, konkrete Dinge versinnbildlichen. Die Basis des Dreieckes mag ein bestimmtes Warenquantum, die Höhe desselben mag den Preis, der Winkel, in welchem beide zusammenstoßen, sowie die Hypothenuse mögen den realen Zusammenhang von Ware und Preis vorstellen. Zu den Ziffern werden wir also noch die sachliche Bezeichnung in Worten oder Buchstaben fügen. Nun erst haben wir die geometrischen Figuren zur vollständigen Veranschaulichung der Verhältnisrechnung tauglich gemacht. Die Drei- und Rechtecke geben uns ein Bild der Größen, ihres Zusammenhangs und ihrer Verhältnismäßigkeit, die Ziffer dient zur genaueren Bestimmung und schärferen Unterscheidung, die Sachbezeichnung endlich erinnert uns beständig an die konkreten Gegenstände, die wir gegebenenfalls zu berechnen haben.

Veranschaulichung des geraden Größenverhältnisses durch ähnliche Dreiecke.

Wir konstruieren ein beliebiges Pythagoräisches (d. i. rechtwinkliges) Dreieck, dessen Endpunkte wir mit den Buchstaben a, b, c bezeichnen wollen. Dieses Dreieck betrachten wir als Norm. Zugleich denken wir uns die Seiten desselben als verschiebbar, so daß daraus

eine beliebige Anzahl ähnlicher Dreiecke gebildet werden kann, indem wir die Basis und Höhe unserer Normalfigur entweder weiter ausziehen (verlängern) oder zurückdrängen (verkürzen).

Nun zur eigentlichen Veranschaulichung!



Dreieck abc ist die Normalfigur und versinnbildlicht uns das bekannte Verhältnis, den Bedingungssatz der Aufgabe. Die Basis ab mag ein bestimmtes Warenquantum, etwa 2 m, die Höhe den Preis hiefür, 1,50 *M.*, vorstellen. Die beiden Dreiecke a_3bc_3 und a_2bc_2 führen uns die möglichen Größenveränderungen vor Augen und zwar zeigt uns die Figur a_3bc_3 das Anwachsen und a_2bc_2 das Abnehmen der Größen im geraden Verhältnis.

Von unserer Zeichnung läßt sich zweierlei ablesen, nämlich

1. die Ähnlichkeit der Dreiecke und im Zusammenhang damit die Ähnlichkeit unserer Sach- und Größenverhältnisse überhaupt;

2. die Proportionalität der korrespondierenden Seiten ähnlicher Dreiecke, sowie jene der gleichnamigen Glieder einer Verhältnisrechnung.

1. Ähnlichkeit der Verhältnisse.

a) $\triangle\, abc \backsim \triangle\, a_3bc_3$
$\backsim \triangle\, a_2bc_2$

b) 2 m : 1,50 *M.* $\backsim$ 4 m : x *M.*
$\backsim$ 1 m : x *M.*

Der Preis für 2 m ist ähnlich dem Preise für 4 m und ähnlich jenem für 1 m.

2. Proportionalität der korrespondierenden oder gleichnamigen Größen.

a) $ab : a_3b = bc : bc_3$
$ab : a_2b = bc : bc_2$

b) 2m : 4m = 1,50 *M.* : x *M.*
2m : 1m = 1,50 *M.* : x *M.*

So oft 2 m in 4 m enthalten sind, so oftmal ist der bekannte Preis (1,50 ℳ) im unbekannten (x ℳ) enthalten; mit dem sovielten Teil als 2 m in 1 m steckt, steckt auch 1,50 ℳ in x ℳ. Dem doppelten Quantum Ware entspricht der doppelte und dem halben der halbe Preis.

Anhaltspunkt für die Berechnung. Nachdem 2 m in 4 m genau so oftmal enthalten sind, wie 1,50 ℳ in x ℳ, so läßt sich aus den beiden Gliedern des ersten Ausdruckes (2 m : 4 m) und dem bekannten Gliede des zweiten (1,50 ℳ) die unbekannte Größe (x ℳ) durch Rechnung leicht ermitteln. Ich brauche das bekannte Glied der zweiten Formel (1,50 ℳ : x ℳ) nur so oftmal zu nehmen als die Enthaltenseinszahl der ersten angibt.

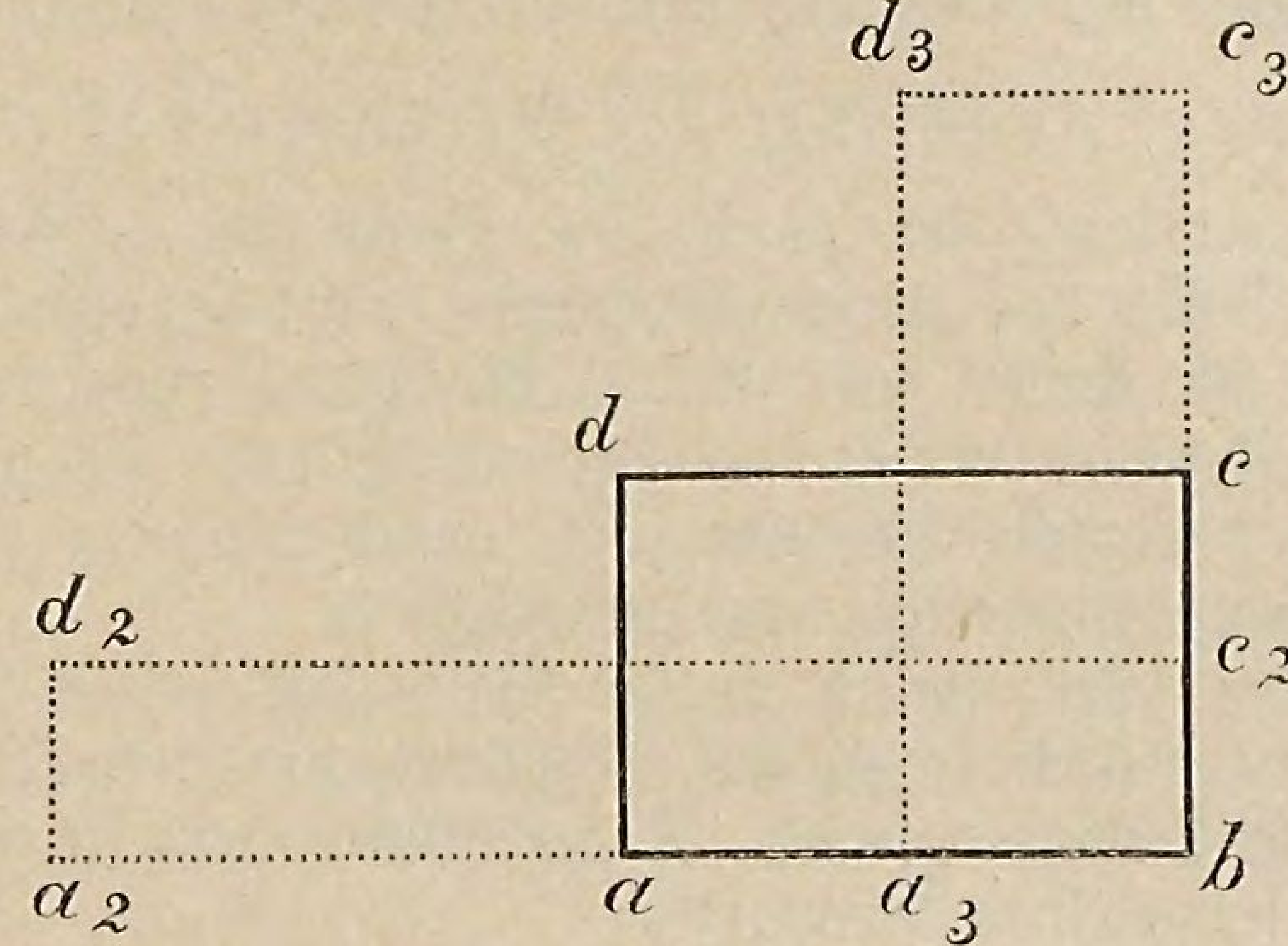
Veranschaulichung des umgekehrten Größenverhältnisses durch Rechtecke.

Bei den umgekehrten Verhältnissen kommt ein Dreifaches in Betracht, nämlich außer den beiden Gliedern des Verhältnisses, noch eine dritte Größe, welche hervorgebracht oder aufgezehrt werden soll. Die Zeichnung hat nun ebenfalls diese drei Stücke, aber außerdem noch die Notwendigkeit, daß, wenn das eine Verhältnisglied zunimmt, das andere abnehmen muß, zur Anschauung zu bringen. Wir wählen zu diesem Behuf das Rechteck.

Die Basis versinnbildlicht das eine, die Höhe das andere Verhältnisglied und die Fläche, welche von den vier Seiten umschlossen ist, die dritte Größe. Unsere Figur vermag somit alle Bestandstücke eines umgekehrten Verhältnisses zu veranschaulichen; sie vermag selbst die Beziehung, in welcher die beiden Verhältnisglieder zur dritten, d. i. zu der zu produzierenden oder zu konsumierenden Größe stehen, zu verdeutlichen. Denn Breite und Höhe bringen das Rechteck, bringen seinen Flächeninhalt erst hervor, sie sind seine Faktoren oder Produzenten; man könnte aber auch sagen, sie brauchen das Rechteck auf, in ihren Schlund verschwindet die Fläche desselben und insofern könnte man sie als seine Konsumenten betrachten.

Am Rechtecke läßt sich sodann das Gesetz der umgekehrten Proportionalität auf das schönste entwickeln. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur seine Seiten als verschiebbar uns vorzustellen und außerdem fortwährend in Erinnerung zu behalten, daß durch diese Verschiebung der Linien der Flächeninhalt nicht wirklich verändert werden darf und daß derselbe der nämliche zu bleiben hat, gleich nun ob ich das Viereck in die Breite ziehe oder in die Höhe strecke. Dabei ist klar: wenn ich die Basis um sich selbst verlängere, so darf ich nur die halbe Höhe nehmen, und wenn ich die Grundlinie um die Hälfte verkürze, so muß ich die Höhe verdoppeln.

Nunmehr zur wirklichen Zeichnung!



Rechteck abcd ist die Normalfigur. Aus derselben wurden durch Verlängerung und Verkürzung der Seiten die zwei weiteren Vierecke $a_2 b c_2 d_2$ und $a_3 b c_3 d_3$ konstruiert. Der Flächeninhalt dieser drei Figuren ist, wie wir uns schon durch den bloßen Augenschein überzeugen können, gleich.

$$abcd = a_2 b c_2 d_2 = a_3 b c_3 d_3.$$

Die Linien ab bc a_2b ꝛc., sowie die von ihnen begrenzten Flächen können symbolisch für die verschiedensten realen Größen gebraucht werden, so mag etwa das Rechteck abcd einen Acker vorstellen, der von einer Anzahl Arbeiter in einigen Tagen umgegraben werden soll, ferner mag die Basis ab die Leistung von 6 Arbeitern und endlich bc die Arbeitsleistung in 4 Tagen veranschaulichen.

Von vorstehender Zeichnung läßt sich ebenfalls ein Zweifaches ablesen:

1. die Verschiebbarkeit des Verhältnisses überhaupt,
2. die Proportionalität der Verhältnisglieder.

1. Verschiebbarkeit des Verhältnisses.

$$abcd = a_2 b c_2 d_2 = a_3 b c_3 d_3.$$

Der Flächeninhalt der drei Rechtecke ist gleich. Aber bei abcd und $a_2 b c_2 d_2$ wird die Fläche vorwiegend durch die Basis, bei $a_3 b c_3 d_3$ dagegen vorzugsweise durch die Höhe hervorgebracht. Der Anteil, welchen die beiden Linien an dem Zustandekommen unserer Figur haben, verschiebt sich. Das einemal ist die Längen-, das anderemal die Breitenausdehnung mehr in Anspruch genommen.

Ebenso: Wenn 6 Arbeiter mit dem Umgraben des Ackers in 4 Tagen fertig werden, so 12 Arbeiter in 2 Tagen und 3 Arbeiter in 8 Tagen. Die Arbeitsleistung oder, wie wir es noch nennen könnten, das Arbeitsquantum bleibt sich in den drei Fällen gleich. Nur das Ver-

hältnis zwischen Arbeiter und Tage verschiebt sich. Bald dominiert der eine Faktor (Zahl der Arbeiter), bald der andere (Anzahl der Tage).

2. Proportionalität der Verhältnisglieder.

$ab : a_2b = bc_2 : bc$, d. h. die Basis des ersten Rechteckes (ab) ist in der Basis des zweiten Rechteckes (a_2b) so oftmal enthalten, wie umgekehrt die Höhe des zweiten Rechteckes (bc_2) in jener des ersten (bc). Beidesmal beträgt das Enthaltensein 2. Die gleichnamigen Seiten der beiden Parallelogramme sind sonach einander proportional, nur ist diese Proportionalität eine umgekehrte.

$ab : a_3b = bc_3 : bc$, d. h. die Basis des ersten Rechteckes ist in der Basis des dritten so oftmal enthalten, wie umgekehrt die Höhe des dritten in der Höhe des ersten. Das Enthaltensein ist beidemal $1/2$. Also ebenfalls umgekehrte Proportion.

6 Arbeiter brauchen zum Umgraben des Ackers 4 Tage; 12 Arbeiter 2 Tage. 6 Arbeiter sind nun in 12 Arbeitern so oftmal enthalten, wie umgekehrt 2 Tage in 4 Tagen, oder, um es abstrakt auszudrücken: Das Enthaltensein der Arbeiter ist hier gleich dem umgekehrten Enthaltensein der Zeiten.

6 Arbeiter brauchen 4 Tage, 3 Arbeiter 8 Tage, deshalb sind 6 Arbeiter in 3 Arbeitern mit dem sovielten Teile enthalten, als 8 Tage in 4 Tagen stecken. Die Glieder unseres Größenverhältnisses stehen also wiederum in umgekehrter Proportion.

Unterscheidung zwischen der eigentlichen Verhältnisgleichung und der bloßen Enthaltenseinsgleichung oder Proportion.

Die Verhältnisgleichung gehört dem Gebiete der Logik, die Enthaltenseinsgleichung dagegen jenem der Arithmetik an. Das ist ihr hauptsächlichster Unterschied.

Ehe ich aber an die Begründung dieser scheinbar paradoxen Behauptung gehen kann, habe ich noch die Begriffe Proportion und Proportionalität zu definieren.

Proportion ist die Gegenüberstellung und Gleichsetzung zweier Enthaltenseinsbestimmungen, wie etwa der beiden Ausdrücke: $2 : 4 = 6 : 12$ (lies: 2 ist in 4 so oftmal enthalten, als 6 in 12) oder, um den Zahlen eine sachliche Benennung zu geben, 2 m : 4 m = 6 *M.* : 12 *M.* (d. h. 2 m sind in 4 m so oftmal, als 6 *M.* in 12 *M.*).

Verhältnismäßig oder proportional werden zwei Zahlformeln genannt, wenn sie das gleiche Enthaltensein aufweisen. Beispiel: $2 : 4$ und $6 : 12$. — 2 ist in 4 zweimal, 6 in 12 ist zweimal. Beidemal ist die Enthaltenseinszahl 2; ergo sind die Ausdrücke $2 : 4$ und $6 : 12$ proportional.

Aus dem Begriff des Proportionalen folgt ferner: Zahlen und Zahlformeln werden verhältnismäßig oder proportional verändert, wenn man sie gleichzeitig vermehrt oder vermindert und zwar so, daß das gegenseitige Enthaltensein immer dasselbe bleibt. Beispiel: 12 und 24. — 12 ist in 24 zweimal. Die Enthaltenseinszahl heißt „2“. Bringe ich nun die 12 auf 13, die 24 auf 26, so ist das Enthaltensein der beiden Zahlen (13 und 26) wiederum „2“. Reduziere ich hernach die 13 auf 3, die 26 auf 6, so giebt dies ebenfalls „2“ als Enthaltenseinszahl. Diese Größenveränderungen müssen darum als verhältnismäßig oder proportional bezeichnet werden. Würde ich aber die 12 um 3 und die 24 um 21 vermehren, so wäre das nicht mehr proportional, denn 15 ist in 45 drei- und nicht zweimal enthalten.

Nun erst werde ich in Kürze beweisen, daß Verhältnis- und Enthaltenseinsgleichung grundverschiedene Dinge sind, und daß es darum verfehlt war, wenn man beide bis jetzt in ein- und denselben Topf geworfen und mit dem gemeinschaftlichen Namen „Proportion“ belehnt hat.

Aufgabe: 2 m kosten 3 ℳ, was 4 m?

Verhältnisgleichung: 2 m : 3 ℳ ∽ 4 m : x ℳ. — In dieser Gleichung wurden zwei Sachverhältnisse, nämlich der bekannte Preis für 2 m und der unbekannte für 4 m einander gegenübergestellt und wurde zugleich ihre Ähnlichkeit behauptet. Der Doppelpunkt zwischen den Verhältnisgliedern (2 m : 3 ℳ ∽ 4 m : x ℳ) zeigt hier weder die Division im Sinne des Teilens, noch auch jene im Sinne des Enthaltenseins an, er steht überhaupt nicht als Operations- oder Rechenzeichen, sondern dient nur dazu, den sachlichen Zusammenhang, das innige Verbundensein von Ware und Preis, m und ℳ, somit eine logische Beziehung auszudrücken.

Nachdem nun die Begriffe „Verhältnis“ und „ähnlich“ offenbar logischen und keineswegs arithmetischen Ursprungs sind und nachdem auch der Doppelpunkt zwischen den Verhältnisgliedern ausschließlich im logischen Sinne gebraucht ist, so folgt daraus wohl von selbst, daß die ganze Gleichung eine spezifisch logische sein wird.

Die Verhältnisgleichung eignet sich aber noch nicht zur Berechnung; denn der Begriff der „Ähnlichkeit“ ist zu vag, als daß man ihn zum Ausgangspunkte unseres Kalküls nehmen könnte. Wir müssen darum die Verhältnisbestimmungen erst in Enthaltenseinsbestimmungen, das spezifisch Logische in ein spezifisch Arithmetisches umwandeln. Dies geschieht durch folgende Erwägungen: Wenn 2 m 3 ℳ kosten, so kosten 4 m selbstverständlich mehr und zwar werden 4 m so oftmal 3 ℳ kosten, als 2 m in 4 m enthalten sind. Ich kann nun, wenn ich will, das geforderte Resultat sogleich ermitteln, sprechend: 2 m sind

in 4 m 2mal, also kosten die 4 m auch 2 mal 3 *M.* oder 6 *M.*; es ist dies die Lösungsweise des gemeinen Menschenverstandes, die Lösung durch Schluß. Ich kann aber auch zuerst die Enthaltenseinsgleichung oder Proportion vollständig herstellen und aus dieser dann das Ergebnis nach der Proportionsregel entwickeln und darin besteht das Rechenverfahren des wissenschaftlich gebildeten Geistes, das Rechenverfahren nach dem Proportionsansatz.

Es ist für die Unterrichtsmethode in der Folge wichtig und muß darum schon jetzt mit besonderem Nachdruck betont werden, daß der sofortigen Lösung durch Schluß (sogenannte Schlußrechnung) ganz dasselbe Verfahren zu grunde liegt, das wir bei der Aufsuchung der Enthaltenseinsgleichung oder Proportion befolgen. Denn beidemale machen wir es uns klar, daß der bekannte Preis (3 *M.*) genau so oftmal genommen werden muß, als 2 m in 4 m enthalten sind. Daraus geht aber deutlich hervor: der gerühmte Proportionsansatz kann auch nicht im geringsten geistbildender sein als die sogenannte Schlußrechnung; er hat vor dieser vielleicht nur das Einzige voraus, daß er umständlicher ist und gleichsam erst auf Umwegen zum Ziele führt. Bis man die Proportionsgleichung anschreibt, also noch lang Vorbereitungen zum eigentlichen Rechnen trifft, ist das Resultat durch Schluß häufig schon gefunden.

Worin nun unterscheidet sich, um wieder auf unsern Gegenstand zurückzukommen, die Enthaltenseinsgleichung oder Proportion von der Verhältnisgleichung? Antwort: Darin, daß sie etwas spezifisch Arithmetisches ist und daß von ihr aus das eigentliche Rechnen ohne Aufschub begonnen werden kann. Die logischen Begriffe „Verhältnis" und „Ähnlichkeit", mit welchen der Rechner doch nichts anzufangen vermag, sind nun zurückgetreten und dafür haben sich die arithmetischen Begriffe „Enthaltensein" und „Gleichheit" in den Vordergrund gedrängt. Auch die beiden Doppelpunkte zwischen den Gliedern der Gleichung sind wieder zu Rechenzeichen geworden; sie haben jetzt die Aufgabe, die Division im Sinne des Enthaltenseins anzukündigen. — Doch, wozu vieler Worte? Setzen wir lieber gleich irgend eine Proportion in Ziffern an, schreiben wir also

$$2\,\text{m} : 4\,\text{m} = 1{,}50\,\mathcal{M} : x\,\mathcal{M}$$

(d. h. 2 m sind in 4 m so oftmal enthalten, wie 1,50 *M.* in x *M.*) und vergleichen wir damit unsere frühere Gleichung

$$2\,\text{m} : 1{,}50\,\mathcal{M} \backsim 4\,\text{m} : x\,\mathcal{M};$$

die charakteristischen Eigentümlichkeiten von beiden können uns unmöglich entgehen.

2. Kapitel.

Schlußrechnung und welsche Praktik.

Die Verhältnisrechnung wurzelt im Sachlichen, im Logischen; sie kann darum auch nur durch sachliche Schlüsse, durch Schlüsse, welche über das Arithmetische, d. h. rein Zahlenmäßige hinausgehen und die realen Verhältnisse der Dinge erfassen, somit vom Größengebiet in's Sachengebiet hinüberschweifen, gelöst werden.

Wir müssen uns den konkreten Zusammenhang, der zwischen den Verhältnisgliedern, also etwa zwischen Ware und Preis oder Arbeit und Zeit besteht, lebhaft vergegenwärtigen und von ihm aus müssen wir sodann folgern und schließen und zwar entweder während des ganzen Kalküls (Schlußrechnung und welsche Praktik) oder wenigstens bei Beginn desselben (Schluß- und Proportionsansatz).

Zwar lassen sich die Verhältnisaufgaben auch auf mechanische, gedankenlose Weise mittelst der alten, bekannten Rechenansätze: Regeldetri und Reesische Regel berechnen und es scheint sonach, als ob hier das Folgern und Schließen entbehrt werden könnte. Doch dürfen wir nicht übersehen, daß in diesem Falle andere, die längst vor uns waren, nämlich eben die Erfinder, die Urheber jener praktischen Rechenregeln für uns gedacht, gefolgert, geschlossen haben.

Es sind im großen Ganzen drei Lösungsweisen denkbar:

1. eine vollständig rationelle, bei welcher das Resultat das Ergebnis der klarsten Schlüsse ist (Schlußrechnung und welsche Praktik),

2. eine zum Teil rationelle, zum andern Teil mechanische, bei welcher nur der Ansatz durch Schluß gefunden, die Ausrechnung selbst aber mehr oder weniger gedankenlos vollzogen wird (Schlußsatz und Proportion),

3. eine total mechanische (Regeldetri und Reesischer Ansatz).

Was nun den Bildungswert dieser möglichen Lösungsweisen anbelangt, so verdienen die Schlußrechnung und welsche Praktik den Vorzug vor dem Schlußsatz, der Schlußsatz den Vorzug vor der Proportion, die Proportion aber den Vorzug vor den mechanischen Ansätzen (Regeldetri und Kettensatz).

Wenn ich den Schlußsatz (Zweisatz, Bruchsatz 2c.) höher stelle als den Proportionsansatz, so geschieht dies deshalb, weil bei ersterem die vorzunehmenden Rechenoperationen (Multiplizieren und Dividieren) selbst durch sachliche Schlüsse erkannt werden, während bei letzterem nur das gleichmäßige Enthaltensein der Verhältnisglieder (die Proportion) unmittelbar durch logischen Schluß gefolgert, dagegen das, was mit den Zahlen zu geschehen hat, nämlich ob sie vermehrt oder geteilt werden sollen, gedankenlos aus der abstrakten Proportionsregel: „Die beiden inneren Glieder sind zu multiplizieren, mit dem äußeren ist zu dividieren“ abgeleitet wird.

Ich werde nun der Reihe nach in gesonderten Kapiteln: die Schlußrechnung und welsche Praktik, dann den Schlußsatz, hernach den Proportionsansatz und schließlich Regeldetri und Kettensatz eingehend untersuchen.

Beginnen wir zunächst mit der Schlußrechnung und welschen Praktik!

Die Schlußrechnung.

Die Schlußrechnung löst die Aufgabe entweder durch einen einfachen Schluß oder durch einen kombinierten Schluß oder durch eine Mehrheit von Schlüssen (Schlußketten, Schlußreihen).

I. Die einfachen Schlüsse.

1. Schluß von der Einheit auf die Mehrheit.

a) Aufgabe mit geradem Größenverhältnis: 1 m kostet 12 *M.*, ? 4 m.

Schluß: Wenn 1 m 12 *M.* kostet, so kosten 4 m 4 mal so viel.

Resultat des Schlusses: Die 12 *M.* sind durch 4 zu vermehren. — Dieses Ergebnis allgemein ausgesprochen: Man findet die Vielheit aus der Einheit durch Vermehren (Multiplizieren).

b) Aufgabe mit umgekehrtem Größenverhältnis: 1 Arbeiter braucht zu einer bestimmten Arbeit 8 Tage, wie lange werden 4 Arbeiter dazu brauchen?

Schluß: Wenn 1 Arbeiter 8 Tage dazu braucht, so brauchen 4 Arbeiter den 4. Teil der Zeit.

Resultat des Schlusses: Also müssen die 8 Tage durch 4 geteilt werden. Wollte man dieses Ergebnis wieder verallgemeinern, so müßte man sagen: Die Vielheit wird aus der Einheit gefunden durch Division.

Letztes Facit: Bei Aufgaben mit geradem Verhältnis wird die Mehrheit aus der Einheit berechnet durch Multiplikation, bei Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnis durch Division. Daraus folgt, daß sich keine allgemein gültige Regel für die Berechnung der Vielheit aus der Einheit aufstellen läßt. Was zu geschehen hat, ob multipliziert oder dividiert werden muß, das hat in jedem einzelnen Falle das Schlußverfahren auszumachen.

2. Schluß von der Mehrheit auf die Einheit.

a) Aufgabe mit geradem Verhältnis: 12 l Wein kosten 36 *M.*, ? 1 l.

Schluß: Wenn 12 l 36 ℳ kosten, so kostet 1 l den 12. Teil.

Resultat des Schlusses: Also müssen die 36 ℳ durch 12 geteilt werden. — Die Einheit wird aus der Mehrheit berechnet durch Division.

b) Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: 3 Röhren füllen einen Wasserbehälter in 2 Stunden, in welcher Zeit 1 Röhre?

Schluß: Wenn 3 Röhren 2 Stunden zur Füllung des Behälters brauchen, so braucht 1 Röhre 3 mal so lang.

Resultat des Schlusses: Also sind die 2 Stunden 3 mal zu nehmen. — Die Einheit wird aus der Mehrheit gefunden, durch Vermehren.

Letztes Facit: Es läßt sich also für die Berechnung der Einheit aus der Vielheit ebenfalls keine ausnahmslos geltende Regel aufstellen. Das einemal wird das Ergebnis erhalten durch Division, das anderemal durch Multiplikation. — Es ist wichtig, daß man den Schüler von aller Anfang an auf diesen Sachverhalt aufmerksam macht. Frühzeitig werde es ihm klar, daß die Vielheit aus der Einheit nicht immer durch Multiplikation und die Einheit aus der Vielheit nicht immer durch Division berechnet werden kann, sowie daß die Aufgaben, in welchen die Zeit in Betracht kommt, besondere Vorsicht verlangen.

3. Schluß von der geringeren auf die größere Vielheit.

a) Aufgabe mit geradem Verhältnis: 3 m kosten 6 ℳ, ? 9 m.

Schluß: 3 m kosten 6 ℳ; 9 m kosten entsprechend mehr und zwar kosten sie so oftmal 6 ℳ als 3 m in 9 m enthalten sind. 3 m sind in 9 m 3 mal, also ꝛc.

b) Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: 4 Arbeiter brauchen 3 Tage, wie lange 12 Arbeiter?

Schluß: 4 Arbeiter 3 Tage; 12 Arbeiter $1/3$ von 3 Tagen.

4. Schluß von der größeren Vielheit auf die geringere.

a) Aufgabe mit geradem Verhältnis: 9 m kosten 18 ℳ; ? 3 m.

Schluß: 9 m kosten den so vielten Teil von 18 ℳ als 9 m in 3 m enthalten sind; 9 m sind in 3 m $1/3$ mal, also ꝛc.

b) Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: 12 Arbeiter brauchen 1 Tag, wie lang 4 Arbeiter?

Schluß: Wenn 12 Arbeiter 1 Tag brauchen, so brauchen 4 Arbeiter, so oftmal 1 Tag als 4 in 12 enthalten ist, 4 ist in 12 dreimal, also ꝛc.

II. Die kombinierten Schlüsse.

1. Schluß von der Vielheit auf die Einheit und von dieser auf eine andere Vielheit.

a) Aufgabe mit geradem Verhältnis:
10 Mann verdienen 70 *M*, ? 3 Mann.
Schluß:

1. Schlußhälfte (Schluß von der Vielheit auf die Einheit): Wenn 10 Mann 70 *M.* verdienen, so verdient 1 Mann den 10ten Teil von 70 *M.*

Ergebnis der 1. Schlußhälfte:
Also müssen die 70 *M.* durch 10 geteilt werden.

2. Schlußhälfte (Schluß von der Einheit auf die Vielheit): Und 3 Mann verdienen 3mal so viel.

Ergebnis der 2. Schlußhälfte:
Also muß mit 3 vermehrt werden.

Ergebnis des ganzen Schlusses:
Die 70 *M.* sind durch 10 zu dividieren und durch 3 zu multiplizieren.

b) Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: Ein Arbeiter wird mit einer bestimmten Arbeit in 8 Tagen fertig, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, wie viel Stunden müßte er täglich schaffen, wenn er das Werk in 6 Tagen fertig bringen sollte?
Schluß:

1. Schlußhälfte: Wenn der Arbeiter seine Arbeit erst in 8 Tagen vollenden muß, so braucht er täglich nur 9 Stunden zu arbeiten, wenn er aber an 1 Tage mit ihr zu Ende kommen sollte, so müßte er im Tage 8mal so lang, also 8mal 9 Stunden thätig sein.

Unser Schluß führt zwar zu einer Unmöglichkeit, nämlich zu der Forderung, der Arbeiter sollte im Tage 8mal 9 d. i. 72 Stunden arbeiten. Dessenungeachtet erfüllt er seinen Zweck; denn er legt uns klar, welche Rechenoperation vorgenommen werden muß. Auch läßt er sich leicht berichtigen dadurch, daß man sagt: Sollte der Arbeiter an einem Tage fertig werden, so müßte der Tag 8mal 9 Stunden haben. Diese Klausel schließt zugleich die Einsicht ein, daß die betreffende Arbeit überhaupt nicht an einem Tage gemacht werden kann.

2. Schlußhälfte: Wenn der Arbeiter in 6 Tagen fertig werden muß, so hat er täglich den 6ten Teil von 72 Stunden, also 12 Stunden zu arbeiten.

2. Schluß von der einen Vielheit zunächst auf irgend eine geringere Vielheit und dann erst auf die andere, zu berechnende.

a) Aufgabe mit geradem Verhältnis: 4 m kosten 6 *M.*; ? 10 m.

Schluß:

1. Schlußhälfte (Schluß von der gegebenen auf eine geringere Vielheit): Wenn 4 m 6 *M.* kosten, so würden 2 m die Hälfte von 6 *M.* = 3 *M.* machen.
2. Schlußhälfte (Schluß von der geringeren Vielheit auf die zu berechnende): Und 10 m kosten dann 5 mal so viel also 5 mal 3 *M.* oder 15 *M.*

b) Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: 12 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 5 Tage, wie lange 10 Arbeiter?

Schluß:

1. Schlußhälfte (Schluß von der größeren auf eine geringere Vielheit): Wenn 12 Arbeiter 5 Tage brauchen, so brauchen 2 Arbeiter 6 mal 5 oder 30 Tage.
2. Schlußhälfte (Schluß von der geringeren auf die zu berechnende größere Vielheit): Und 10 Arbeiter brauchen den 5ten Teil von 30 Tagen, d. i. 6 Tage.

3. Außer den beiden kombinierten Schlüssen, die wir bis jetzt kennen gelernt haben, könnte man vielleicht noch einen dritten unterscheiden, nämlich jenen von der einen gegebenen Größe auf eine übergreifende, d. i. zu groß genommene Vielheit und von letzterer erst auf das zu berechnende Resultat.

Beispiel: 10 m kosten 15 *M.*, ? 4 m.

Lösung: Wenn 10 m 15 *M.* kosten, so würden 40 m 4 mal 15 oder 60 *M.* machen und 4 m kosten dann den 10ten Teil von 60 *M.*, d. i. 6 *M.* — Diese Lösungsweise ist indes zu kompliziert. Beim Kopfrechnen kommt sie fast nie zur Anwendung, da sie gegen den wichtigen Grundsatz: operiere mit möglichst kleinen Zahlen! verstößt. Im Zifferrechnen dagegen wird sie häufig und zwar gedankenlos und ohne bewußte Absicht befolgt, so oft man nämlich bei der Ausrechnung von Aufgaben mit direktem Verhältnis die Multiplikation vor der Division vollzieht.

III. Die Schlußreihen.

Eine Reihe von Schlüssen ist erforderlich:

1. so oft zusammengesetzte Verhältnisse gegeben sind, also bei den sogenannten Fünf-, Sieben- oder Vielsatzaufgaben,

2. so oft eine Aufgabe zwei und mehr Bedingungssätze enthält, Kettenrechnung.

Wir haben also zu unterscheiden:

1. die Schlußreihen bei Verhältnisaufgaben mit zwar nur einem, aber dafür mehrgliedrigen Bedingungssatz und

2. die Schlußreihen bei Verhältnisaufgaben mit zwei und mehr Bedingungssätzen.

Jede dieser beiden Möglichkeiten will ich an einem Beispiele erläutern.

a) Verhältnisaufgabe mit einem mehrgliedrigen Bedingungssatz: Ein Graben, der 30 m lang, 2 m breit und 1,5 m tief ist, kostet 300 *M.*, wie viel kostet ein Graben von 90 m Breite und 1 m Tiefe?

Schlußreihe:

1. Schluß: Bei 30 m Länge kostet der Graben 300 *M.*, daher bei 90 m 3 mal so viel, also 900 *M.*

2. Schluß: 900 *M.* würde der Graben bei 2 m Breite kosten, bei 1 m Breite kostet er die Hälfte, also 450 *M.*, und bei 1,5 m $1\frac{1}{2}$ mal so viel, also 675 *M.*

3. Schluß: 675 *M.* wäre der Preis bei 1,5 m Tiefe, bei 0,5 m Tiefe beträgt er den dritten Teil, d. i. 225 *M.* und bei 1 m das Doppelte, also 450 *M.*

b) Verhältnisaufgabe mit mehreren Bedingungssätzen, sogenannte Kettenrechnung: Wie viele Dollar kosten 2500 Stück Ware, wenn 1000 Stück 1200 Fr. kosten, 5 Fr. = 4 *M.* und 30 *M.* = 7 Dollar sind?

Schlußreihe:

1. Schluß: Wenn 1000 Stück 1200 Fr. kosten, so kosten 500 Stück 600 Fr. und 2500 Stück 5 mal so viel, also 3000 Fr.

2. Schluß: Wenn 5 Fr. = 4 *M.* sind, so ist 1 Fr. der 5te Teil von 4 *M.* oder $^4/_5$ *M.* und 3000 Fr. sind 3000 mal $^4/_5$ *M.* oder 2400 *M.*

3. Schluß: Und nachdem 30 *M.* = 7 Dollar sind, so ist 1 *M.* der 30te Teil von 7 Dollar oder $^7/_{30}$ Dollar und 2400 *M.* sind 2400 mal $^7/_{30}$ Dollar d. i. 560 Dollar.

Die welsche Praktik.

Hentschel bemerkt in seinem „Lehrbuch" (2. Teil, 1. Abteil. S. 148): „Die welsche Praktik löst mittelst Zerlegen des ersten, resp. dritten Gliedes in Faktoren nebst Summanden oder Subtrahenden und ferner durch Zusammenfassen der einzelnen Ergebnisse zum Gesamtresultat. Große Zahlen sucht dieselbe möglichst zu vermeiden; dagegen führt sie zuweilen freilich auch auf Weitläufigkeiten. Die Hauptsache liegt darin, jedesmal für den gegebenen Fall die zweckmäßigste Zerlegung zu finden und dieselbe dann sicher und schnell auszuführen."

(S. 147.) 1. Wie viel kosten 32 hl à 9,6 ℳ = ?

Es kosten 10 hl	96 ℳ
3 mal 10 hl also . .	288 ℳ
dazu $^1/_5$ von 96 ℳ mit	19,2 ℳ
gibt	307,2 ℳ

(S. 147.) 2. 214 m à 2,45 ℳ = ?

200 m	= 2 × 245 ℳ =	490 ℳ
10 m	=	24,5 ℳ
4 m	= 4 × 2,45 ℳ =	9,8 ℳ
	Summa	524,3 ℳ

(S. 148.) 3. 29 ar à 24,8 fl.

10 ar =	248 fl.
30 ar =	744 fl.
ab 1 ar mit	24,8 fl.
läßt	719,2 fl.

(S. 148.) 4. 91 Schock à 5,08 ℳ

10 Schock	=	50,8 ℳ
90 Schock	= 9 × 50,8 ℳ =	457,2 ℳ
dazu 1 Schock	=	5,08 ℳ
	Summa	462,28 ℳ

Die welsche Praktik berechnet also, wie wir aus vorstehenden Beispielen ersehen, die Aufgabe nicht plötzlich und ganz, sondern Stück für Stück, sie macht aus dem einen Rechenexempel zwei und mehr; darin besteht ihr eigentliches Wesen. Im übrigen aber befolgt sie ganz dasselbe Verfahren, das wir bei der Schlußrechnung kennen gelernt haben.

Eigentümlich sind ihr, wie gesagt, allein die mannigfaltigen Zerfällungen und Zerlegungen; doch hat sie auch hierin die kombinierten Schlüsse zu ihrem Vorbild. Wie man bei den letzteren auf ein kleineres Stück geht (geringere Vielheit oder Einheit) und von diesem aus das Ganze berechnet (1. und 2. kombinierter Schluß) oder auf

ein größeres Quantum schließt, als gefordert wird und daraus erst die unbekannte Größe durch Division ableitet (3. kombinierter Schluß), so ermittelt auch die welsche Praktik zuerst ein kleineres Stück als verlangt ist und stellt daraus das Gesamtergebnis dar

a. durch entsprechende Multiplikation oder

b. durch Addition

oder sie berechnet ein größeres Quantum als gegeben ist und kommt dann zum Resultate

a. durch nachfolgende Division oder

b. durch Subtraktion.

Was endlich den praktischen Wert, die Anwendbarkeit der welschen Praktik anbelangt, so eignet sich dieselbe offenbar nur für das mündliche Rechnen oder für das teilweis mündliche, teilweis schriftliche (d. i. kaufmännische) Lösungsverfahren; für das rein schriftliche Rechnen dagegen empfiehlt sie sich nicht; Ansätze führen hier viel rascher und sicherer zum Ziele.

---

3. Kapitel.

Schlußsatz.

Der schriftlichen Berechnung einer Aufgabe geht jederzeit das Anschreiben oder Ansetzen derselben voraus. Es ist selbstverständlich, daß man dabei auf die verschiedenste Weise verfahren kann. Vor allem sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder befolgt man beim Ansetzen eine hergebrachte Rechenregel oder Schablone (Rechenansatz im engeren Sinne) oder man läßt sich ausschließlich durch Verstandesschlüsse leiten ohne sich an eine bestimmte Form zu binden und spricht dann von einem Rechnen außer dem Ansatz.

Was nun die eigentlichen Rechenansätze betrifft, so gehen sie wieder auseinander entweder in nebensächlichen Dingen, also etwa in der Art und Weise, wie die Ziffern neben oder unter einander geschrieben werden (z. B. Regeldetri und Reesischer Ansatz) oder in ihrem innersten Wesen (z. B. Regeldetri und Schlußsatz).

Vom Schlußsatz, der Rechenregel der Neuzeit, wollen wir in diesem Kapitel handeln. Seine eigentümliche Beschaffenheit, seine wahre Natur wollen wir uns ganz und vollständig klar legen.

1.

Der Schlußsatz ist die reife Frucht des Schließens. Bei ihm wird durch Schlüsse ausgemacht, was mit den gegebenen Größen zu geschehen hat, ob sie zu multiplizieren oder zu dividieren sind. Das Schließen gehört zu seinem Wesen, es bildet sein hervorstechendes, charakteristisches Merkmal. Ja, wir können sagen: so oft beim An-

setzen einer Aufgabe von der Vielheit auf die Einheit ꝛc. geschlossen wird, die Ziffern mögen nun in Bruchform, in Divisionsform oder auch nach der Schablone der Regeldetri oder des Reesischen Ansatzes angeschrieben werden, haben wir es mit dem Schlußsatze zu thun.

Derselbe benötigt im ganzen nur drei Schlüsse:

1. den einfachen Schluß von der Einheit auf die Vielheit.

Beispiel: Wenn 1 m 15 *M.* kosten, so kosten 20 m 20 mal 15 *M.*

Ansatz: 15 *M.*
$\times$ 20

2. den einfachen Schluß von der Vielheit auf die Einheit.

Beispiel: Wenn 20 m 300 *M.* kosten, so kostet 1 m den 20. Teil.

Ansatz: 20/300 *M.* oder 300 *M.* : 20,

3. den kombinierten Schluß von der einen Vielheit auf die Einheit und von dieser auf die andere Vielheit.

Beispiel: Wenn 20 m 300 *M.* kosten, so kostet 1 m den 20. Teil von 300 *M.* und 17 m kosten 17 mal so viel.

Ansatz: $\frac{300.17}{20}$ oder 20 | 300 *M.*
| 17

Nachdem aber diese drei Schlüsse offenbar der Schlußrechnung entlehnt sind, so könnte man fragen: Worin unterscheiden sich Schlußsatz und Schlußrechnung? Liegt nicht beiden ein und dasselbe Lösungsverfahren zu grunde?

Die Antwort auf unsere Frage würde lauten: Schlußsatz und Schlußrechnung differieren in folgenden zwei Punkten.

1. Beim Schlußsatz hat das Schließen nur den Zweck, die vorzunehmenden Rechenoperationen festzustellen, es befaßt sich nur mit dem Ansetzen der Ziffern und erstreckt sich nicht auch auf die Berechnung. Letztere wird mehr oder weniger mechanisch und gedankenlos vollzogen und weicht in der Regel von dem durch das Schlußverfahren des Ansatzes vorgebildeten Lösungsgang ab; denn jede Kürzung ist, wie ich weiter unten zeigen werde, im grunde genommen eine andere Lösung. Bei der Schlußrechnung dagegen gewinnt das Schließen unmittelbaren Einfluß auf den Rechengang. Jedem Schlusse folgt hier sogleich die Ausführung. Wie der erstere ist, genau so gestaltet sich die letztere, d. i. die thatsächliche Berechnung.

2. Der Schlußsatz benötigt nur drei Schlüsse. In der Schlußrechnung dagegen kommen außer jenen dreien noch eine Menge anderer vor und zwar:

a. Schlüsse, welche den Kürzungen bei der schriftlichen Lösung entsprechen,

b. Schlüsse, welche im Zifferrechnen gar kein Analogon haben und hauptsächlich nur zu bequemen Zerfällungen der Zahlen in Faktoren und Posten führen (Kopfrechen-Vorteile, welsche Praktik).

Würde uns nun jemand fragen: Welche Lösungsweise verdient den Vorzug, jene durch Schlußsatz oder durch Schlußrechnung? so müßten wir antworten: Beide Berechnungsarten sind einander völlig ebenbürtig. Die eine ist das regelrechte Verfahren bei der schriftlichen Lösung, die andere bei der mündlichen. Wie es aber verfehlt wäre, eine Aufgabe im Kopf mittelst Schlußsatz zu lösen (da ja der letztere nur für die schriftliche Darstellung bestimmt ist), ebenso unstatthaft würde es sein, wenn man die Schlußrechnung dem Zifferrechnen zu grunde legen wollte.

2.

Wie ich bereits angedeutet habe, ist der Schlußsatz an keine bestimmte Form gebunden. Man kann ihm darum sowohl die Gestalt eines Bruches, als auch jene einer Divisionsaufgabe geben, ja man vermag ihn selbst mit den alten mechanischen Rechenregeln (Regeldetri und Kettensatz) auf das innigste zu amalgamieren. Und es ist ein bloßes Vorurteil, wenn A. Böhme die Bruchform im Ansatz als etwas Wichtiges und Unerläßliches hält. Indes steht er mit dieser Meinung nicht allein, er teilt sie mit fast allen Rechenmethodikern der Gegenwart.

In einem der folgenden Kapitel werde ich den überzeugenden Nachweis liefern, daß die Bruchform mit dem Wesen, dem Kern unseres neuen Rechenansatzes nicht das geringste zu schaffen hat, daß ihr die Divisionsform aus praktischen Gründen weit vorzuziehen ist und daß die letztere als die handlichere und übersichtlichere mit der Zeit die erstere ganz verdrängen muß.

Was nun das Rechnen ohne Ansatz anbelangt, so gründet sich dasselbe ganz und gar auf den Schlußsatz und ist nichts anderes als eine besondere Abart oder Abzweigung des letzteren; es ist der Schlußsatz, der sich von jeder bestimmten Form losgeschält hat und deshalb das Widerspiel, das Gegenstück der Rechenansätze zu sein scheint. Diese Thatsache ist wichtig für die Untersuchung und Entscheidung der Frage, welche zuerst Goltzsch in seinem anregenden Werke: „Der verbundene Zahl-, Sach- und Meßunterricht in der Oberklasse der Volksschule“ aufgeworfen und verneint hat, der Frage nämlich: ob Rechenansätze überhaupt notwendig sind. — Zur Klärung der Meinungen sei hier zum teil wiederholt, was ich bereits zu Anfang dieses Kapitels ausgesprochen habe: Es gibt kein schriftliches Rechnen ohne Anschreiben oder Ansetzen der Aufgabe.

Beim Ansetzen lassen wir uns entweder durch mechanische Rechenregeln oder durch Schlüsse leiten. — Den Ansatz aber, der das Resultat des Schließens ist, wie sollen wir ihn anders nennen, als Schlußsatz?

Und, wenn man sich wirklich von jedem bestimmten Rechenschema losgesagt hat, muß man dann beim Anschreiben der Aufgaben nicht wenigstens von einem unserer drei Schlüsse Gebrauch machen, muß man also der Hauptsache nach nicht doch wieder nach Schlußsatz rechnen? Wenn man aber den letzteren beibehalten muß, warum will man sich nicht dazu verstehen, ihn in eine bequeme, leichtfaßliche Form zu kleiden, in eine Form, welche es auch dem Talentlosesten ermöglicht, verwickeltere Verhältnisaufgaben zu lösen? Wozu also das absprechende Urteil: Wir brauchen keine stereotype Regel für das schriftliche Rechnen, wir brauchen keinen Ansatz?

3.

Endlich: der Schlußsatz unterscheidet sich von den alten mechanischen Rechenschablonen (Regeldetri ꝛc.) nur in der Art und Weise des Ansetzens, keineswegs aber im Lösungsgange, in der Ausrechnung. Ich muß dies bemerken, um einen Irrtum, den Heuner in seinem Lehrbuche verschuldet hat und der sich von da weiter verbreitet haben mag, zu widerlegen. Auf Seite 286 des genannten Werkes sagt unser Methodiker wörtlich: „Es sind für die schriftliche Berechnung der Verhältnisaufgaben so viele Formen möglich, als es für sie allgemein anwendbare Auflösungsweisen gibt". Und nachdem er sodann an einem Beispiele gezeigt hat, daß es auf mehrfach verschiedene Weise berechnet werden kann, fährt er fort: „Wir sehen hier dreierlei wesentlich verschiedene Auflösungen und ebenso dreierlei Ausrechnungen. Es ist aber begreiflich, daß wir für das Zifferrechnen nicht mehr als eine Form zugleich einführen dürfen und daß dieselbe längere Zeit ausschließlich, später wenigstens vorzugsweise angewendet werden müsse. Die Frage, welche Weise den anderen vorzuziehen sei, ist übrigens leicht zu beantworten. Die erste Auflösung ist so einfach und natürlich, daß ihr unbestritten der Vorzug gebührt. Sie liegt der schriftlichen Rechnungsform zu grunde, welche man die Zweisatzrechnung nennt."

Nach Heuner's Meinung müßten also so viele Rechenansätze denkbar sein, als es verschiedene Auflösungsweisen gibt und darum müßte auch jeder besonderen Rechenregel eine ihr ausschließlich eigentümliche Lösung entsprechen, dem Zweisatz eine andere als dem Proportionsansatz und diesem wiederum eine andere als der Regeldetri und dem Reesischen Ansatz. Verhält es sich nun in der That so?

Nein! Eine eingehende Untersuchung dieser Sache ergibt, daß allen unsern Ansätzen ein- und dasselbe Lösungsverfahren zu grunde liegt, und daß sie sich nur in der Form, d. i. in der besonderen schriftlichen Darstellung unterscheiden. Machen wir dies an einem Beispiel ersichtlich!

Aufgabe: 4 m kosten 12 ℳ, ? 8 m.

Regeldetriansatz: 4 m 12 ℳ 8 m.

Reesischer Ansatz:

ℳ ?	8 m
m 4	12 ℳ

Proportion: 4 m : 8 m = 12 ℳ : x ℳ

Zweisatz (Bruchsatz, Schlußsatz):

4 m 12 ℳ
8 m ?

$\frac{12 \cdot 8}{4}$ oder

4	12
	8

In allen diesen Ansätzen wird das Resultat gefunden, indem man entweder a) die 12 ℳ mit 8 multipliziert und dann mit 4 dividiert, oder b) die 4 und die 12 gegenseitig kürzt und darauf erst mit 8 multipliziert oder c) die 4 und die 8 kürzt und schließlich durch 12 vermehrt. Es sind dies drei wesentlich verschiedene Lösungsweisen.

Lösungsweise a) Indem ich die 12 ℳ (d. i. der Preis für 4 m) 8mal nehme, berechne ich den Preis für 8 mal 4 oder 32 m und erhalte dann erst durch Dividieren mit 4 jenen für 8 m.

Lösungsweise b) Dadurch, daß ich 4 und 12 gegenseitig kürze, bekomme ich den Preis für 1 m (3 ℳ) und indem ich darauf diese Zahl (3 ℳ) 8 mal nehme, jenen für 8 m.

Lösungsweise c) Ich kürze 4 und 8 und multipliziere mit 12. Es ist dies dasselbe, als würde ich bei der mündlichen Berechnung das Enthaltensein der 4 m in 8 m suchen und dann kalkulieren: 4 m sind in 8 m 2mal, — darum kosten auch 8 m 2mal 12 ℳ.

Innerhalb eines jeden Rechenansatzes sind also verschiedene Auflösungen möglich. Es ist eine andere Lösungsart, ob ich zuerst multipliziere und dann dividiere, oder ob ich dem Multiplizieren das Kürzen der Multiplikatoren und Divisoren vorausgehen lasse, also zuerst teile und dann vermehre. Jede mögliche Kürzung bedeutet eine besondere, eigenartige Lösung.

In dieser Möglichkeit, eine Aufgabe auf verschiedene Weise, nämlich mit oder ohne Kürzen zu berechnen, stimmen alle Ansätze überein. Derselbe Lösungsgang, den wir beim Zweisatz befolgen, findet ebensowohl Anwendung bei der Regeldetri wie beim Proportions- und beim Reesischen Ansatz. Heuner ist demnach in einer argen Täuschung befangen, wenn er behauptet, dem Zweisatze liege ein besonderes, sich von den übrigen Rechenansätzen vorteilhaft unterscheidendes und ihm allein eigentümliches Lösungsverfahren zu grunde. Gerade in der

Art und Weise der Auflösung besteht zwischen den für das Zifferrechnen geltenden Regeln und Schablonen völlige Übereinstimmung. Man darf darum den Henner'schen Gedanken geradezu umkehren und sagen: So vielfach auch die Formen für die schriftliche Darstellung einer Aufgabe sein mögen, so gleichen sie sich doch alle in der Lösungsweise, im Rechengange.

---

4. Kapitel.

Proportionsansatz.

Wir unterscheiden zwischen der Proportionsgleichung und der Proportionsregel. Beides sind, obschon sie in unserm Ansatze nur verbunden vorkommen, grundverschiedene Dinge. Die Herstellung der Proportionsgleichung erfordert jederzeit Verstand und Überlegung, sie kann nie und nimmer kopflos besorgt werden. Anders verhält es sich mit der Befolgung der Proportionsregel, d. i. jener Regel, nach welcher die beiden inneren (resp. äußeren) Glieder der Gleichung zu multiplizieren sind und dann das auf diese Weise erhaltene Produkt durch das dritte Glied dividiert werden muß.

Ich will das eben Gesagte detaillieren und zugleich so klar und überzeugend machen, als es mir nur möglich ist.

1. Die Proportionsgleichung.

1. Beispiel: 2 Arbeiter verdienen sich 12 *M.*, ? 6 Arbeiter?
Proportion: 2 Arbeiter : 6 Arbeiter = 12 *M.* : x *M.*

2. Beispiel: 2 Arbeiter beenden eine Arbeit in 9 Tagen; wie lange werden 6 Arbeiter brauchen?

Proportion: 2 Arbeiter : 6 Arbeiter = x Tage : 9 Tage.

Das Ansetzen der Proportionen macht dem Kinde, aber auch dem Erwachsenen und im Rechnen wenig Geübten große, zuweilen unüberwindliche Schwierigkeiten. Ich habe nun oft darüber nachgedacht, wie es denn kommt, daß das Auffinden der leichtesten Enthaltenseinsgleichung (Proportion) einen solchen Aufwand von Scharfsinn erheischt, während doch die Berechnung derselben Aufgabe durch Schluß nichts weniger als schwer fällt und selbst von mittelmäßig und schwach Begabten ohne besonderes Kopfzerbrechen vollzogen werden kann.

Ich glaube, die richtige Antwort auf diese Frage geben zu können:

1. Bei der Lösung einer Verhältnisaufgabe durch Schluß wird der sachliche Zusammenhang, der zwischen den einzelnen Gliedern der Rechnung, also z. B. zwischen Ware und Preis besteht, keinen

Augenblick aus dem Gesichte verloren. Es kommt nicht zur unnatürlichen, gewaltsamen Trennung, Isolierung und Gegenüberstellung der Verhältnisglieder. Zeigen wir dies wieder an einem Beispiele: 4 m kosten 12 M. ? 8 m. Bei Schlußsatz und Schlußrechnung kalkuliere ich nun: Wenn 4 m 12 M. kosten, so machen 8 m genau nochmal so viel. Mit der Vorstellung: Ware verbinde ich also unmittelbar den Begriff: Preis. Ware und Preis sind hier in meinem Denken auf das innigste verkettet und diese Verkettung der beiden Dinge entspricht dem Sachverhalt, der Wirklichkeit. Was an sich geeinigt ist, das ist es in diesem Falle auch im Denken; aber eben dadurch wird das letztere selbst ungemein anschaulich. — Der Proportionsansatz hingegen trennt die Verhältnisglieder (Ware und Preis), er zerreißt gewaltsam den gegebenen sachlichen Zusammenhang, er isoliert und stellt gegenüber, was in Wirklichkeit nur verbunden vorkommt, z. B. 4 m : 8 m = 12 M. : x M. Dieses Isolieren und Gegenüberstellen der beiden korrelativen Vorstellungen (Ware und Preis) kostet aber dem Denken Anstrengung, es erfordert einige Übung im Abstrahieren und will darum unseren Kindern fast gar nicht gelingen. Man entzieht ihnen ja den Boden des Anschaulichen, auf dem sie sich allein heimisch fühlen, und läßt ihnen nichts mehr, woran sie sich halten oder zurechtfinden könnten. Während Schlußsatz und Schlußrechnung dem anschaulichen, dem konkreten, dem sinnenfälligen Denken angehören, bewegt sich die Proportion vorwiegend im Gebiete des abstrakten Gedankens.

2. Ein weiterer Grund, weshalb Schlußsatz und Schlußrechnung ungleich leichter sind, als die Proportionsgleichung dürfte folgender sein. Schlußsatz und Schlußrechnung steuern schnurstracks auf das Ziel los; jeder Schritt, den wir in denselben machen, bringt uns dem Resultate näher; der schwächste Schüler sieht bei Beginn des Kalküls ein, wie die einzelnen Folgerungen zum Ergebnis hinleiten müssen; er begreift leicht, daß so und nicht anders verfahren werden darf und läßt sich unschwer von der Zweckmäßigkeit des eingeschlagenen Lösungsganges überzeugen. Die Proportionsgleichung dagegen führt scheinbar vom Ziele ab; man will wissen, was 8 m kosten, und setzt dafür die 4 m und 8 m, die 12 M. und den zu suchenden Preis in Verhältnis, schließend: so oft 4 m in 8 m enthalten sind, ebenso oft müssen 12 M. in x M. stecken. Diese Einsicht ist gewiß sehr schön, aber (so fragt der gemeine Menschenverstand) was hat das mit der Berechnung zu schaffen? Ich will erfahren, was die 8 m kosten und nicht, wie sich die 4 m zu 8 m und die 12 M. zu x M. verhalten.

Nach meiner Überzeugung ist es unmöglich, einem Schüler der Volksschule einen klaren Begriff von der Angemessenheit der Proportion zur Lösung von Verhältnisaufgaben zu geben. Trotz meiner eingehendsten Auseinandersetzungen wird er nie verstehen, was die

Enthaltenseinsbestimmungen mit der Berechnung zu thun haben. Er wird zwar, wenn ich ihn dazu abrichte, die Aufgaben ganz prächtig in Proportion anschreiben, aber ohne recht zu wissen, was denn das ganze Gebahren eigentlich soll.

3. Eine besondere Schwierigkeit bereiten Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnisse. Denn das Versetzen des 4. Gliedes auf die 3. Stelle des Ansatzes und des 3. Gliedes auf die 4. Stelle ist etwas so Geringfügiges, Verfängliches, daß ungemein leicht dagegen verstoßen werden kann. Der gewöhnliche Kopf vermag nur schwer zu begreifen, wie das Umkehren der Enthaltenseinsglieder des zweiten Ausdruckes den Gang der Rechnung total anders gestalten muß. Was aber die Sache noch um vieles schwieriger macht, das ist der Umstand, daß die beiden ersten Glieder des Ansatzes genau so geordnet sind, wie in Proportionen mit geradem Verhältnis, daß man ihnen also das umgekehrte Verhältnis nicht anmerkt, während sie doch der Natur der Sache zufolge daran notwendig partizipieren.

2. Die Proportionsregel.

Dem Ansetzen der Proportion folgt die Berechnung nach der sogenannten Proportionsregel, welche wo möglich noch abstrakter ist und dabei den ausgesprochensten, den nacktesten Mechanismus nicht bloß zuläßt, sondern geradezu fordert. Ja, ich stehe nicht an, zu behaupten, dieselbe ist schon von Haus aus etwas Mechanisches und kann von dem Schüler nur auf eine kopflose, gedankenlose Weise angeeignet werden. Der Lehrer verfährt dabei etwa wie folgt: Er setzt einige Proportionen in unbenannten Zahlen an der Schultafel an, z. B. 2 : 4 = 6 : 12, 5 : 15 = 3 : 9; dann läßt er die beiden inneren Glieder mit einander multiplizieren, ebenso die beiden äußeren und daraus die abstrakte Thatsache abziehen, daß das Produkt der inneren und äußeren Glieder gleich ist; darauf zeigt er, wie eines der vier Glieder unserer Gleichung durch Multiplikation und Division der drei anderen gefunden werden kann und schließlich läßt er die Regel, nachdem sie an unbenannten Zahlen entwickelt ist, sogleich und ohne viel Worte zu verlieren oder auch nur die Natur der Sachverhältnisse, nämlich des eigentümlichen realen Zusammenhangs von Ware und Preis, Arbeiter und Zeit 2c. kurz zu erläutern, auf benannte Aufgaben übertragen und anwenden. Der Schüler verhält sich dabei nur erfahrend, nicht aber begreifend; er sieht wohl, daß es so ist, doch keineswegs, daß es so sein muß; die Proportionsregel wird zwar von ihm aufgenommen und gedächtnismäßig festgehalten, sie wird aber nicht verstanden. Der Kindesgeist ist noch zu schwach, um die Abstraktionen, die ihm in der Proportion zugemutet werden, wirklich zu vollziehen. Wir können unserm Schüler zwar die Regel eindrillen, wir können

ihn abrichten zu einer mechanischen Befolgung derselben, wir können sogar den Schein erregen, als ob er sie wirklich begriffe, indem wir ihm allerlei Definitionen 2c. einprägen und ableiern lassen, so daß er auf alle Fragen, die wir über diesen Gegenstand an ihn stellen, die richtige, wissenschaftlich präzisierte Antwort zu geben vermag: wir können ihm aber nie und nimmer das eigentliche und tiefere Verständnis erschließen. Zu solchen Dingen ist die kindliche Kapazität noch nicht reif. Ja, ich bin überzeugt, daß selbst ein großer Teil der Erwachsenen unvermögend ist, den Proportionssatz und die Proportionsregel, besonders in ihrer Anwendung auf benannte Aufgaben, klar zu durchschauen.

3. Der Proportionsansatz.

Der Proportionsansatz setzt sich aus zwei Stücken oder Elementen zusammen, nämlich aus der Enthaltenseinsgleichung und der Proportionsregel. Die erstere, d. i. die Enthaltenseinsgleichung, wird in der Theorie immer eine hervorragende Stelle behaupten, denn sie gibt das Fundament der Verhältnisrechnung ab und wird erhalten, so oft man das Wesen derselben zergliedert und auf ihre letzten Voraussetzungen verfolgt.

Daraus geht aber noch nicht hervor, daß sie sich auch zum Rechenansatz eignen müsse. Als solcher wäre sie nicht bloß für das Kind, sondern auch für den Durchschnittsmenschen viel zu schwierig. Die Enthaltenseinsgleichung oder Proportion hat nur Wert für die Theorie, nicht für das Leben. Sie wird den Schülern auf Lateinschulen und Gymnasien vorzuführen sein, aber nicht als Rechenschema, sondern bloß zur tieferen, wissenschaftlichen Begründung. Wir sind also weit entfernt, die Bedeutung der Proportion zu unterschätzen; wir stellen sie vielmehr über alle Rechenregeln und sagen: Die Enthaltenseinsgleichung (Proportion) ist das Fundament aller Verhältnisrechnungen, sie spricht in bündiger, präziser Weise die Wahrheit aus, auf welche sich jeder bei der Lösung bewußt oder unbewußt beruft und ohne welche letztere überhaupt nicht möglich wäre, nämlich die Wahrheit von der Proportionalität in den Veränderungen der Verhältnisglieder. Wir behaupten nur: Als Rechenansatz taugt die Proportion absolut nichts.

Was nun die Befolgung der Proportionsregel, d. i. jener abstrakten Vorschrift, nach welcher die beiden innern (resp. äußern) Glieder zu multiplizieren sind und mit dem dritten dividiert werden soll, betrifft, so ist das der kopfloseste Mechanismus, den man sich nur denken kann und zwar ist dieser Mechanismus noch weit schlimmer, als der des Reesischen Ansatzes und der Regeldetri; denn letztere wollen doch nichts anderes scheinen, als was sie sind. Die Proportion aber erhebt den Anspruch, die geistbildendste Rechenregel zu sein, und

der Lehrer, der sie seinen Schülern mühsam eingepaukt hat, meint, er habe, weiß Gott, in welchem Grade, ihre intellektuellen Kräfte geübt und geschärft.

Wozu, könnte man nun fragen, wozu beim Ansetzen der Proportion so viel Scharfsinn aufbieten, wenn doch die Berechnung schließlich zum gedankenlosesten Mechanismus führt? Bedienen wir uns doch gleich lieber der Regeldetri oder des Reesischen Ansatzes! Mechanismus haben wir ja hier wie dort!

Weg also mit der Proportion als Rechenregel! Die Enthaltenseinsgleichung ist die wissenschaftliche Formel für eine wichtige Wahrheit, sie spricht das Dogma oder richtiger das Axiom aus, auf dem die Theorie der Verhältnisrechnung gebaut ist, sie eigenschaftet sich aber nicht zu einem Schema für die schriftliche Lösung. Zu diesem Zwecke ist sie zu abstrakt, zu subtil, zu fleischlos, mit einem Worte zu scientifisch.

Der Schlußsatz (Zweisatz, Bruchsatz) hat die Proportion aus den Volksschulen vollständig zu verdrängen; er ist die Rechenregel des praktischen Lebens; er ist das Mittel, durch welches die Lösung der Verhältnisaufgaben jedem einzelnen nicht nur möglich, sondern auch ungemein verständlich und anschaulich wird.

Wenn wir nun Schlußsatz und Proportion mit einander vergleichen, welcher Unterschied! Hier die abstrakte, wissenschaftliche Regel, die trockene, schwer verständliche Theorie, dort das Lösungsverfahren des gemeinen Menschenverstandes, die einfachsten, natürlichsten Schlüsse.

Der Proportionsansatz lohnt, wie wir uns überzeugt haben, nicht im entferntesten die Denkanstrengung, die er verlangt; er erheischt viel Geisteskraft und bringt es doch nicht zur vollen Klarheit in der Lösung; ja, er ist selbst zum großen Teil mechanisch, gedankenlos, da er für jeden einzelnen Fall nicht klar macht, warum (nämlich aus welchen sachlichen Gründen) multipliziert oder dividiert werden muß; endlich ist er viel zu schwierig; kurz der Proportionsansatz ist unpraktisch, er paßt nicht für das Alltagsleben und darum gehört er auch nicht in die Schule.

Sehen wir nun den Schlußsatz genauer an! Der Lösungsgang ist hier ungemein einfach und natürlich. Sich anlehnend an das Bekannte (den Bedingungssatz), wird bei geradem Größenverhältnis aus der Einheit die Mehrheit berechnet durch entsprechendes Vervielfachen (Multiplizieren) und aus der Mehrheit die Einheit gefunden durch entsprechendes Vermindern (Dividieren). Was ist selbstverständlicher als dies? Aber auch bei Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnis ist die Lösung durch Schluß sehr leicht. Daß, je größer die Zahl der Arbeiter ist, desto eher eine Arbeit beendet werden wird, und umgekehrt, daß, je weniger Arbeitskräfte sind, desto mehr Zeit zur

Ausführung und Vollendung des Werkes erfordert wird, ist doch klar und muß von dem schwächsten Schüler begriffen werden. Die Berechnung durch Schluß ist aber nicht blos die einfachste, natürlichste, verständlichste, durchsichtigste, sie ist überdies die denkbar kürzeste und zweckmäßigste. Nichts ist darin überflüssig und entbehrlich. Jede Umständlichkeit ist ausgeschlossen. Schnurstracks und mit Anwendung der zweckmäßigsten Mittel steuert man auf das Ziel los, das man gleich von Anfang deutlich erfaßt hat und während der ganzen Berechnung nicht mehr aus dem Auge verliert. Endlich und das dürfte wohl einer seiner wichtigsten und wesentlichsten Vorzüge sein, ist unser Rechenansatz ungemein leicht, und er wird es, wie ich es in einem eigenen Kapitel darthun werde, in noch weit höherem Grade werden, wenn man ihn mit dem Kettenansatz verbindet.

Schließlich sei es noch einmal gesagt: Der Schlußsatz ist die beste, die vorzüglichste Regel für das schriftliche Rechnen; die alten Schablonen (Regeldetri ꝛc.) haben kein Recht mehr neben ihm zu existieren und sie werden ganz sicher, so weit sie sich nicht damit verbinden, mit der Zeit vollständig verschwinden und der verdienten Vergessenheit anheimfallen. Nur der Schlußsatz wird alle überdauern.

Schlußwort zur erschöpfenden Charakterisierung von Proportions- und Schlußsatz.

Was die Lösung nach der Proportionsregel besonders erschwert, das ist der rasche Sprung, der dabei vom spezifisch Logischen auf das spezifisch Arithmetische gemacht wird.

Beim Ansetzen der Proportion denke ich noch an die konkrete Sache, an Einkauf und Verkauf, an Ware und Preis. Und wenn mir vielleicht auch nicht einleuchtet, was die Enthaltenseinsgleichung im Gange der Lösung soll, so begreife ich doch, daß dieselbe möglich und richtig ist und zwar begreife ich dies aus sachlichen Gründen. Sobald ich aber die Ausrechnung beginne, oder auch bloß die Entscheidung treffe, ob multipliziert oder dividiert werden soll, habe ich es nur mehr mit Zahlen zu thun; die Vorstellung der Sache geht vollständig verloren; an ihre Stelle tritt der abstrakte Größenbegriff. Diese Wendung vom Logischen zum Arithmetischen ist eine zu jähe, zu plötzliche; der Geist vermag sich ihr nicht immer zu akkommodieren; nachdem er zuerst im Sachlichen, im Logischen thätig war, vermag er sich nicht auf einmal im rein Zahlenmäßigen oder Arithmetischen zurecht zu finden.

Ungleich leichter wird ihm die spezifisch logische Lösung der Aufgabe durch Schlußrechnung und Schlußsatz; denn hier braucht er den Faden nicht abzureißen, den Standpunkt nicht plötzlich zu ändern; hier ist Konsequenz, kontinuierlicher Zusammenhang; hier wird das spezifisch Logische fest gehalten von Anfang bis zu Ende.

Der bisherigen Lösung durch Proportion ist eigentümlich, daß zwar der Ansatz allein durch logischen, aus dem gegebenen Sachverhältnis geschöpften Schluß zu stande kommt, daß aber die eigentliche Aufgabe und Bestimmung desselben doch nur in dem Bestreben zu suchen ist, das Logische der Rechnung möglichst rasch in rein Arithmetisches umzuwandeln. Die Proportion sollte die Aufgabe lösen durch spezifisch arithmetische Mittel und soweit dies nur immer möglich ist, ohne Zuhilfenahme von sachlogischen Schlüssen, sie sollte sich ausschließlich oder doch vorwiegend auf das Zahl- und Größengebiet beschränken und über dasselbe nicht hinausgehen. Das war die Absicht, welche sie in's Dasein gerufen, und das ist der Zweck, den sie zu erfüllen hat.

Nun aber ist zu bedenken, daß die Arithmetik vielleicht nie fähig gewesen wäre, die Proportion zu erfinden, wenn sie nicht von außen die Anregung, von außen den Begriff „Verhältnis" empfangen hätte, sowie, daß sie die Enthaltenseinsgleichung (Proportion) selbst nur durch logischen Verstandesgebrauch zu stande bringt, wenn sie ihn auch gleich auf ein Minimum, nämlich eben auf den Ansatz (Enthaltenseinsgleichung) beschränkt.

Warum aber soll die Logik nicht auch während der Berechnung etwas darein zu reden haben? Warum soll sie nicht mit der Arithmetik Halbpart machen dürfen? Hat das Sachliche (Logische) nicht denselben Einfluß auf das Zustandekommen des Resultates als das Zahlenmäßige (Arithmetische)? Warum soll das logische Element soweit hinter dem arithmetischen zurückstehen? Warum soll jenes weniger Beachtung, weniger Pflege finden, als dieses? Warum soll der Rechnende nicht einsehen dürfen, wie sich das Ergebnis aus den realen, konkreten Verhältnissen heraus entwickelt? Warum soll er seine Aufmerksamkeit ausschließlich dem abstrakten Zahl- und Größenbegriff zuwenden? — Nimmt die Lösung durch Proportion nicht eine Zwitterstellung ein, indem sie wohl beim Ansetzen die logische Überlegung herausfordert, aber hernach während des ganzen Berechnungsganges auf dieselbe verzichtet? Und entzweit sie den Geist nicht mit sich selbst, indem sie ihm zumutet, unmittelbar nach einander zwei so verschiedene Standpunkte, wie den sachlogischen und rein arithmetischen, zu vertreten?

Aber, wenn wir den Proportionssatz verwerfen, wird dann nicht die Verhältnisrechnung ihren wissenschaftlichen Halt, ihre genaue, präzisierte Form einbüßen?

Nein, das wissenschaftlich exakte Fundament, auf das sich unsere Rechenart ewig stützen wird, ist der Verhältnisbegriff, der dem Rechnenden in irgend einer Gestalt, am besten in der der Verhältnisgleichung (logischen Gleichung), vorschweben muß, es sind sodann die Schlüsse, welche auf Grund des erkannten Sachverhältnisses gezogen

werden und die ebenfalls, sowohl was ihre Anzahl, als was ihren Inhalt betrifft, etwas Exaktes, Evidentes und genau Bestimmtes, somit Wissenschaftliches sind.

Aus allem ergibt sich: Der Schlußsatz ist zum mindesten ebenso wissenschaftlich, als die Proportion. Mit diesem wichtigen Resultate sei meine Untersuchung abgeschlossen.

---

5. Kapitel.

Regeldetri und Reesischer Ansatz.

Die Regeldetri.

Bei diesem Ansatz werden die drei bekannten Glieder der Rechnung horizontal neben einander und zwar in ihrer natürlichen Reihenfolge geschrieben und dann wird das dritte Glied mit dem zweiten multipliziert und das Produkt durch das erste dividiert. Selbstverständlich kann diese Regel nur auf Aufgaben mit geradem Verhältnis angewandt werden, um sie auch für solche mit umgekehrtem tauglich zu machen, mußte man Ausnahmen erfinden.

Seinem Wesen nach ist unser Ansatz der purste Mechanismus. Er wurde vom Schüler wie vom Erwachsenen gehandhabt, ohne daß sich dieselben der Gründe ihres Thuns bewußt worden wären. Man war überzeugt, daß man das richtige Resultat erhalten wird, aber diese Überzeugung stammte nicht aus der klaren Einsicht in den Lösungsgang; sie war eine Folge der Gewöhnung und hatte ihre Wurzeln im blinden Glauben und Vertrauen auf die Verläßlichkeit und Unfehlbarkeit der Regel.

Indes läßt sich das Verfahren, das man bei der Regeldetri befolgte, rechtfertigen und begründen sowohl durch Proportions- als durch Schlußsatz.

Beispiel: 4 m kosten 8 *M.*, ? 7 m.

Regeldetri:

$$\begin{array}{lll} 4\text{ m} & 8\,\mathcal{M} & 7\text{ m} \\ & \times\, 7 & \\ \hline 4 & |\; 56\,\mathcal{M} = & \underline{14\,\mathcal{M}} \end{array}$$

Begründung durch Proportion. Aus dem Ansatz:

4 m   8 *M.*   7 m

läßt sich ohne Schwierigkeit die Verhältnisgleichung

$$4 : 8 = 7 : x$$

gestalten, und es wird dann, wenn man diese Umwandlung thatsächlich vollzieht, auch begreiflich, weshalb man die 8 mit der 7 (das zweite mit dem dritten Glied) vermehren und darauf das Ergebnis

durch die 4 (d. i. das erste Glied) teilen muß, man befolgt ja dabei nur die Proportionsregel. Die Regeldetri kann sonach als eine verkümmerte Proportion, als eine Gleichung, bei welcher das vierte Glied (nämlich die Unbekannte, x) in Wegfall gekommen, und die Einsicht, daß zwischen den gegebenen Größen ein Verhältnis besteht, verloren gegangen ist, betrachtet und darum durch Zurückgreifen auf den Proportionssatz erläutert werden.

Begründung durch Schlußsatz: Wenn 4 m 8 *M.* kosten, so kostet 1 m den 4. Teil, also ist mit dem ersten Glied des Ansatzes (4) in das mittlere (8 *M.*) zu dividieren und 7 m kosten 7 mal so viel, darum muß man das dritte Glied (7) mit dem zweiten multiplizieren.

Wie leicht, wie verständlich läßt sich unser Ansatz durch logischen Schluß begründen; wie schwerfällig, wie abstrakt wissenschaftlich gestaltet sich dagegen die Sache, wenn wir die Proportionslehre zu Hilfe nehmen.

Der Reesische Ansatz.

Der Reesische Ansatz ist unstreitig eine sehr bequeme und nette Rechenregel. Er ordnet die Glieder gleichsam von selbst und zwar so, daß die Multiplikatoren rechts vom Divisionsstrich, die Divisoren links davon zu stehen kommen, er setzt jeden, den schwach Begabten sowohl wie den gut Talentierten, in den Stand, schwierigere Verhältnisaufgaben zu berechnen und war ehemals für die große Mehrzahl geradezu unentbehrlich. Wir müssen den Scharfsinn unserer Vorfahren bewundern, der ihnen eine so hübsche, handliche und praktische Rechenregel erfinden ließ.

Charakteristisch ist an derselben:

1. Die eigentümliche sprachliche Form, in welche sie die Aufgabe kleidet und nach welcher sie jede Verhältnisrechnung in ihre beiden logischen Elemente, nämlich in den Fragesatz und in den Bedingungssatz zerlegt.

Beispiel: 4 m kosten 8 *M.*; ? 7 m.

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
M. ?	7 m	Was kosten 7 m (Fragesatz),
m 4	8 *M.*	wenn 4 m 8 *M.* kosten? (Bedingungssatz).

(Man hat während der letzten Dezennien viel Aufheben von dem sogenannten Zweisatz gemacht. Durch den Würtemberger Stern wurde er sogar in einem eignen Buche, wenn ich nicht irre um das Jahr 1852, verherrlicht und als eine neue und wichtige Entdeckung gepriesen und empfohlen. Bei Lichte betrachtet ist er aber nur eine Abart, eine besondere Gestaltung des Schlußsatzes. Selbst in dem Umstande, daß

er jede Aufgabe vor allem in Frage- und Bedingungssatz auflöst, ist er nicht originell; denn hier hat er den Reesischen Ansatz, der insofern als eine Antizipation des ersteren betrachtet werden kann, zum Vorbild.)

2. Die Anwendung des Divisionsstriches. Sie gestattet es, alle Rechenoperationen, vor allem auch das Multiplizieren mit mehrstelligem Multiplikator und das Dividieren mit mehrstelligem Divisor im Ansatz selbst auszuführen und macht dadurch Nebenrechnungen überflüssig.

3. Die unmittelbare Gegenüberstellung der Multiplikatoren und Divisoren. Eine wesentliche Erleichterung beim Kürzen.

4. Die Beibehaltung der konkreten Bezeichnungen M, l, m, kg, Arbeiter, Tag rc. Während Proportionssatz, Bruchsatz u. s. w. die Zahlen ohne sachliche Benennung, also unvollständig bringen, gibt die Reesische Regel die Aufgabe vollständig, d. h. mit der Sachbezeichnung wieder; dadurch erleichtert sie das Auffinden von Ansatzfehlern und macht überdies, indem sie ein Glied unmittelbar an das andere anschließt, das Übersehen und Weglassen einer Zahl nahezu unmöglich.

5. Der Reesische Ansatz kann auch auf Aufgaben mit mehr als einem Bedingungssatz angewendet werden. In diesem Punkte übertrifft er alle übrigen Ansatzformen, welche sich nur zur Berechnung von Aufgaben mit nur einem Bedingungssatze eignen. Er hat vor jenen ein größeres Feld der Anwendung voraus.

Wir sehen: der Reesische Ansatz ist praktisch in eminentem Sinne. Darum drang er auch unter das Volk und wurde populär wie kein anderer. Noch heute rechnen Kaufleute fast nur nach der Reesischen Regel. Der sogenannte Zweisatz dagegen ist nirgends im Gebrauch. Es scheint, als ob er nur für die Schule, nur für die Kinder erfunden worden wäre. Ich habe noch keinen einzigen Erwachsenen sich desselben bedienen sehen. Und das ist mir auch sehr begreiflich. Dieser Ansatz ist eben zu weitschweifig, zu umständlich, zu breit. Sollte er Gemeingut aller werden können, so müßte er vor allem eine zweckmäßigere und knappere Gestalt erhalten.

Wie die Regeldetri, so gehört auch der Reesische Ansatz zu den mechanischen Rechenregeln und vermag sich darum nicht selbst zu begründen. Wer ihn verstehen will, der muß sich ihn entweder mittelst der Proportion oder mittelst des Schlußsatzes zurechtlegen. Die erstere Erläuterungsweise aber ist schwer und umständlich, weil in unserem Ansatz die einzelnen Glieder der Proportion vollständig durcheinander geworfen sind und weil deshalb die Enthaltenseinsgleichung (Proportion) nicht gut daraus hergestellt werden kann. Wir wollen uns hier aus diesem Grunde mit der Rechtfertigung unseres Ansatzes durch Schluß zufriedenstellen.

Reesischer Ansatz:

ℳ ?	7 m
m 4	8 ℳ

Begründung desselben: Wenn 4 m 8 ℳ kosten, so kostet 1 m den 4. Teil, daher ist mit der links vor dem Divisionsstrich stehenden 4 zu teilen, und 7 m kosten 7 mal so viel, deshalb müssen die rechts hinter dem Divisionsstrich befindlichen Zahlen 7 und 8 mit einander multipliziert werden. Somit ist die Richtigkeit der Reesischen Regel erwiesen.

Über den Wert der mechanischen Rechenansätze.

Es läßt sich nicht abstreiten, daß die alten Rechenschablonen (Regeldetri und Reesischer Ansatz) trotz ihres Mechanismus in hohem Grade bequem und praktisch waren. Und auf die Frage: Sind die mechanischen Rechenregeln ganz und gar zu verwerfen oder dürfen sie unter gewissen Einschränkungen und Bedingungen noch beibehalten werden? kann man, je nachdem man sich auf den Standpunkt des praktischen Lebens stellt oder einseitig den Grundsatz der Verstandesbildung vertritt, zwei verschiedene und zwar völlig entgegengesetzte Antworten geben, von welchen die eine vielleicht ebenso viel Berechtigung besitzt als die andere. Ich möchte zu dieser Angelegenheit eine vermittelnde Stellung nehmen. Nach meiner Ansicht sind die gedankenlosen Rechenansätze weder unbedingt zu verdammen, noch auch besonders zu verteidigen. Sie haben eine gewisse Berechtigung, aber nur insofern, als sie eine Verbindung mit irgend einem rationellen Rechenverfahren eingehen und man auf den mechanischen Ansatz unmittelbar die Begründung durch Schluß folgen läßt. Sie eignen sich vorzüglich als Voransätze, d. i. als eine bestimmte, praktische Weise, die Aufgaben überhaupt anzuschreiben; sie dürfen aber nicht als eigentliche Rechenregeln gebraucht werden. Ist ein Beispiel in der Form der Regeldetri oder des Kettensatzes angesetzt, so haben wir durch Schlußverfahren zu bestimmen, was mit den einzelnen Gliedern der Rechnung zu geschehen hat und dann erst dürfen wir mit der eigentlichen Ausrechnung beginnen, nicht eher.

Meine Absicht ist also, Regeldetri und Kettensatz mit dem Zweisatz oder Schlußsatz zu verbinden und dadurch letzteren selbst praktischer, handlicher, populärer zu machen. Zugleich aber verurteile ich auf das entschiedenste den Gebrauch, den man seither von ihnen gemacht hat. Wie ich den gedankenlosen, geisttötenden Mechanismus in den übrigen Unterrichtsgegenständen der Volksschule befehde und nur dem berechtigten Mechanismus, d. i. jenem Mechanismus, der es nicht bleibt, sondern indirekt auf das Verständnis einer Sache hinarbeitet

oder das Einprägen bereits verstandener Dinge zum Zwecke hat, das Wort rede, so bin ich auch prinzipiell gegen die rein mechanische Anwendung der Regeldetri und des Kettensatzes, dank welcher sich die Lösung gleichsam von selbst und ohne mein Zuthun macht und bei welcher der Rechnende nie zur Klarheit kommt, wie das Resultat aus dem Ansatz hervorgeht. Denn in diesem Falle ist der Rechner nur das ausführende Werkzeug, nur die Maschine, durch welche die Regel wirkt und das richtige Ergebnis hervorbringt, und ist es die Rechenschablone, die über ihm steht, die ihn beherrscht und der er sich blindlings unterwirft, der er folgt, ohne zu sehen, wohin sie abzielt. Wenn sie ihn im Stiche läßt, wenn sie ihm ihren Dienst versagt, er merkt es nicht einmal. Nur das Unwahrscheinliche im Resultate kann ihm vielleicht vermuten lassen, daß die Aufgabe falsch angesetzt sein muß. Aber wie, auf welche Weise soll er es nun besser machen? Wer bürgt ihm dafür, daß er das zweitemal nicht wiederum einen Verstoß begeht? Ratlos steht er nun da, nachdem ihn die Regel, welche ihn seither geleitet, unvermerkt auf einen Abweg gebracht hat; er hat nichts, woran er sich zurechtfinden könnte und muß darum die Berechnung entweder aufgeben oder einem anderen, besser Unterrichteten überlassen. — Die alte Schule wußte indes diesen Verlegenheiten, in welche der rein mechanische Kopf fast unvermeidlich verfällt, dadurch vorzubeugen, daß sie die von der Regel abweichenden Fälle besonders aufzählte und zu deren Lösung Ausnahmen, d. i. bestimmte Modifizierungen des Ansatzes erfand, die dann den Schülern eingetrichtert, resp. eingeprügelt wurden. Aber welcher Fleiß, welche Ausdauer und Geduld, welcher ungeheure Zeit- und Kraftaufwand wurden erfordert, um all' diesen Kram zu lernen und im Gedächtnis festzuhalten! Dabei konnte jedoch die alte Schule trotz ihrer Unzahl von Regeln und Regelchen die Arbeit des Kopfes nicht ganz entbehrlich machen; denn es gehörte sicher fast ebenso viel Scharfsinn dazu, herauszufinden, wann diese oder jene Ausnahme statt hat, als ein verständnisvolles Ansetzen erheischt hätte.

Ich bin also, um das Endergebnis meiner Betrachtung in wenigen Worten auszusprechen, gegen den Regeldetri- und Reesischen Ansatz, insofern sie rein mechanisch, d. i. ohne nachfolgendes Räsonnement gebraucht werden, aus praktischen Gründen und zwar 1. weil sie in diesem Falle unzureichend sind und häufig im Stiche lassen und 2. weil das Einprägen der Ausnahmen, sowie die Beurteilung, ob eine derselben und welche bei einem gegebenen Rechenexempel vorliegt, zum mindesten ebenso viel Geisteskraft erfordert, als ein rationelles Ansetzen durch Schluß verlangen würde.

6. Kapitel.

Zweckmäßige Um= und Neugestaltung des Schlußsatzes durch Vereinigung mit der Reesischen Regel.

Aufgabe der Rechenansätze, ihre Unentbehrlichkeit.

Jeder, auch der schwächste Schüler, soll befähigt werden, dereinst die Rechenaufgaben, welche das Alltagsleben an ihn stellen mag, selbständig zu lösen. Zu diesem Zwecke genügt es nicht, den Kindern das Wesen der Verhältnisrechnung überhaupt zum Verständnis zu bringen. — Die bestverstandenen Schlüsse und Urteile werden vergessen. — Wir müssen ihnen vielmehr irgend eine bestimmte Form oder Regel einüben, die leicht gemerkt werden kann, die sich auf alle Verhältnisaufgaben ausnahmslos anwenden läßt und die es unseren Schülern ermöglicht, rasch und sicher in das Verständnis der Rechnung einzudringen. Diese Regel muß sich so fest ihrem Gedächtnis einverleiben, daß sie darin bleibt, wenn sie gleich jahrelang nicht mehr gebraucht werden sollte. Sie muß zu einem unverlierbaren, geistigen Eigentum werden. Der Handwerker, Taglöhner, Bauer soll sich derselben noch bedienen können, nachdem Dezennien seit seinem Schulaustritt verflossen sind. Darum muß unsere Regel ungemein praktisch, ja sie muß in gewissem Sinne mechanisch sein, auf daß auch der gedankenlose Kopf mit ihr zu operieren vermag.

Man hat in neuerer und neuester Zeit zuweilen das Wort vernehmen können: Fort mit den Rechenansätzen! Wir brauchen sie nicht!

Nun ja, für jene, welche die Parole ausgegeben haben, mögen sie überflüssig sein, nicht aber für den im Rechnen Ungeübten. Für diesen sind sie zum mindesten ebenso unentbehrlich, wie für den Mathematiker die Gleichungen und die algebraischen Formeln. Ansätze und Gleichungen, was sind sie anderes als zweckmäßige Umformungen der Aufgabe, als bloße Vorarbeiten, als Hilfsmittel, als Krücken für das eigentliche Rechnen? Freilich ein klar denkender Kopf bedarf nicht der Unterstützung durch Ansatz, aber ein noch subtilerer und scharfsinnigerer Geist würde auch der algebraischen Formeln nicht benötigen. Ansätze und Gleichungen sind notwendig, jene für den gemeinen Mann, diese für den Gelehrten. Die Rechenansätze erfüllen eine doppelte Aufgabe:

1. helfen sie die Rechnung entwirren und setzen dadurch die große, gedankenlose Menge erst in den Stand, den Kalkül überhaupt zu beginnen und

2. ermöglichen sie es uns, vorteilhafte Reduktionen vor der Berechnung vorzunehmen; sie erleichtern und kürzen somit den Lösungsgang. Das sind aber wichtige Dienste, die nicht unterschätzt werden dürfen.

Anforderungen, welche an eine praktische Rechenregel gestellt werden müssen.

1. Die Rechenregel sei einfach, natürlich, ungekünstelt! Jede Aufgabe lasse sich leicht und zwanglos in die Ansatzform bringen!

2. Sie sei kurz und bündig! Sie mache keine besonderen Vorarbeiten notwendig! Je umständlicher sie ist, desto weniger taugt sie.

3. Sie habe keine Ausnahmen und lasse sich auf alle möglichen Verhältnisaufgaben anwenden!

4. Sie gebe die Aufgabe vollständig wieder, also die Zahlen mit der sachlichen Benennung, so daß man aus dem Ansatze ohne Umstände das ganze Rechenbeispiel ablesen kann.

5. Sie mache Nebenrechnungen entbehrlich! Alle Operationen, darum auch das Multiplizieren mit mehrstelligem Multiplikator ꝛc. müssen sich im Ansatz selbst ausführen lassen.

6. Sie gestatte das Eindringen in das volle Verständnis der Aufgabe, sie sei aus diesem Grunde so beschaffen, daß sich mühelos Schlüsse darein reihen lassen, so daß aus Schlüssen erkannt werden kann, was zu geschehen hat, ob multipliziert oder dividiert werden soll, insbesondere habe sie die logischen Bestandstücke der Rechnung, die Prämissen, von welchen die Folgerungen ausgehen, nämlich Frage- und Bedingungssatz streng und zwar auch räumlich von einander gesondert!

Mit Fug und Recht dürfen wir behaupten, daß keiner von den Rechenansätzen, die seither im Gebrauche waren, vollständig unserm Ideal entspricht. Am nächsten kommt ihm noch der Reesische Ansatz. Denn derselbe ist einfach und natürlich, kurz und bündig, läßt sich auf alle möglichen Verhältnisaufgaben anwenden, gibt sie mit ihrer sachlichen Bezeichnung, also vollständig wieder, macht es möglich, sämtliche Rechenoperationen im Ansatze selbst vorzunehmen und enthält endlich Frage- und Bedingungssatz, die beiden logischen Elemente der Verhältnisrechnung, ausgeschieden. Aber diese schöne, praktische Regel wurde bisher nur mechanisch, nur gedankenlos gebraucht. Man hat es unterlassen sie zu begründen. Man hat sich ihrer bloß auf eine kopflose Weise bedient. Nun läßt sich jedoch unschwer begreifen, daß sie ganz leicht in eine verständnisvolle, rationelle Rechenregel umgewandelt werden kann; man hat ja nur nötig, dem mechanischen Ansetzen sogleich die Begründung durch Schluß folgen zu lassen.

Wie umständlich und kompliziert aber nimmt sich dagegen das Verfahren aus, das wir in unserem Zweisatz oder Bruchsatz bethätigen. Zwar läßt man es nicht mehr an der Rechtfertigung des Lösungsganges fehlen, und das ist ein wesentlicher Fortschritt; aber man ist zugleich zu breit, zu gründlich geworden; man hat über dem Formalbildenden das Praktische aus dem Auge verloren. Jede Verhältnis-

aufgabe wird heutzutage zweimal angeschrieben, das einemal im Voransatz, das anderemal in der eigentlichen Rechnung. Und wie unzweckmäßig ist der Gebrauch der Bruchform, bei welcher sich die Ziffern selbst im Wege stehen und sich gegenseitig beengen, so daß nur die einfachsten Operationen an ihnen unmittelbar vollzogen werden können! Wie oft haben wir dabei den Ansatz zu erneuern! So oft durch eine Reihe von Kürzungen die Zahlen zu weit auseinander gerückt werden, so oft das Resultat einer Nebenrechnung in den Ansatz eingefügt werden soll, so oft müssen wir auch denselben neuerdings anschreiben. Welche Menge von Ziffern wird dazu erfordert! Wie ökonomisch, wie sparsam verfährt dagegen die Reesische Regel! Durch den bloßen Augenschein läßt sich schon darthun, daß der Zweisatz (Bruchsatz) genau nochmal so viel Platz verlangt und mehr als nochmal so viel Ziffern zu seiner Darstellung erheischt. Eine folgerichtige Konsequenz daraus ist, daß er auch die doppelte Zeit beanspruchen wird. Unser Zweisatz ist also zwar rationell, aber zugleich weitschweifig und unpraktisch. Unwillkürlich drängt sich nun die Frage auf: Läßt sich denn beides, das Formalbildende des modernen Rechenansatzes und das eminent Praktische der Reesischen Regel nicht mit einander verbinden? oder mit anderen Worten: Kann man nicht aus Zweisatz und Kettensatz einen einzigen machen?

Die einfachste und zweckmäßigste Ansatzform.

Unter den denkbar möglichen schriftlichen Darstellungsweisen (Ansätzen) der Verhältnisrechnung ist unzweifelhaft jene die einfachste, übersichtlichste und darum empfehlenswerteste, welche die Multiplikatoren und Divisoren unmittelbar gegenüberstellt und nur durch einen Strich trennt; also die Aufgabe: 4 m kosten 12 *M*, was kosten 8 m? in dieser Form:

4	12 *M*
	8

oder auch auf folgende Manier:

$$\frac{12\,\mathcal{M} \,.\, 8}{4}$$

ansetzt.

Unsere Gegenüberstellung der Multiplikatoren und Divisoren kann, wie dies bei der Reesischen Regel in der That der Fall ist, mechanisch und gedankenlos bewerkstelligt, sie kann aber auch durch Schlüsse, also mit Verständnis vollzogen werden, und von dieser zweiten Möglichkeit haben wir im Zwei- oder Bruchsatz ein erläuterndes Beispiel.

Endlich vermag dieselbe, wie ich oben gezeigt habe, zwei verschiedene Gestalten anzunehmen, nämlich entweder die der horizontalen oder jene der vertikalen Reihe (Bruchform, Divisionsform).

Welche von diesen beiden einfachsten Formen nun wieder den Vorzug vor der anderen verdient, das läßt sich nach einiger Überlegung unschwer entscheiden. Und ich zweifle nicht im geringsten, daß der Leser von selbst das Richtige treffen wird, treffen muß. Dessenungeachtet will ich die Mängel, welche der Bruchform anhaften, sowie die Vorteile, welche die Anwendung der Divisionsform gewährt, der Reihe nach aufzählen.

I. Mängel der Bruchform, Vorzüge der Divisionsform beim Anschreiben der Aufgabe.

Setze ich eine Verhältnisrechnung in Bruchform an, so muß ich die sachliche Bezeichnung bei den einzelnen Zahlen jederzeit weglassen, da sie im Wege stehen und die Übersicht erschweren würde. Ich darf demnach die Aufgabe: 12 Arbeiter verdienen 376 *M.*, wie viel 45 Arbeiter? nicht so anschreiben

$$\frac{376\ \mathcal{M}.\ .\ 45\ \text{Arbeiter}}{12\ \text{Arbeiter}},$$

ich muß sie vielmehr in dieser Weise darstellen

$$\frac{376\ .\ 45}{12}.$$

Bei der Divisionsform dagegen kann ich die Sachbenennung unbeanstandet beibehalten, z. B.

Arbeiter 12	376 *M.*
	45 Arbeiter.

Dies hat den wesentlichen Vorteil, daß ich die ganze Aufgabe unmittelbar vom Ansatz abzulesen vermag und daß ich, wenn sich beim Ansetzen zufällig ein Fehler eingeschlichen haben sollte, damit nicht wieder von vorn anzufangen, sondern nur die einzelnen Glieder der Rechnung rasch durchzugehen brauche.

II. Mängel der Bruchform, Vorzüge der Divisionsform beim Kürzen.

Ist eine Aufgabe in Bruchform angeschrieben, so muß ich, wenn ich kürzen will, die eine Zahl über den betreffenden Multiplikator, die andere unter den Divisor setzen; dadurch werden die Ziffern immer weiter auseinander gerückt. Häufig geht darüber die Übersicht verloren. Beispiel: 175 Stück kosten 25 *M.*, was 1225 Stück?

$$\frac{25\ .\ \begin{array}{c}7\\ \not{49}\\ \not{245}\\ \not{1225}\end{array}}{\begin{array}{c}\not{175}\\ \not{35}\\ \not{7}\\ 1\end{array}}$$

Wie wir sehen, ist hier der Multiplikator „7“ vom Divisor „1“ durch sechs Schichten von Ziffern getrennt.

Ganz anders gestaltet sich die Sache bei der Divisionsform. Hier werden die Ziffern nicht auseinander geschoben, sie werden nur successive nach abwärts gerückt, aber so, daß der Multiplikator und der zu ihm gehörige Divisor unmittelbar gegenüberstehen.

Stck. ~~175~~	25 M.
	~~1225~~ Stck.
~~35~~	~~245~~
~~7~~	~~49~~
1	7

So weit man auch die Kürzungen fortsetzen mag, man hat die Multiplikatoren und Divisoren immer dicht neben einander und braucht sie nicht erst, wie bei der Bruchform, aus einem Wust von Ziffern mühsam herauszusuchen. Das macht den Ansatz übersichtlich; zudem erleichtert es die Vergleichung der Zahlen und, da das Vergleichen dem Kürzen vorausgeht, somit auch letzteres.

III. Mängel der Bruchform, Vorzüge der Divisionsform bei der Berechnung.

Die Bruchform im Ansatz verursacht eine unnötige Weitschweifigkeit und Umständlichkeit bei der Ausrechnung. Sie zwingt zu Nebenrechnungen, zu einem mehrmaligen Anschreiben ein- und derselben Zahl. Zeigen wir dies wieder an einem Beispiel!

17 Arbeiter verdienen 773,50 M., was 39 Arbeiter?

Ansatz in Bruchform:

$$\frac{773{,}50 \,.\, 39}{17} = \frac{30\,166{,}50}{17} = \underline{1\,774{,}50 \text{ M.}}$$

Nebenrechnungen:

```
  773,50        17 | 30 166,50 M. = 1 774,50 M.
   × 39              17
 ---------           ---
 6 961,50            131
23 205,00            119
 ---------           ---
30 166,50 M.          126
                      119
                      ---
                        76
                        68
                        --
                         85
                         85
                         --
                         —
```

Wir sehen also:

1. Multiplikationen mit mehrstelligem Multiplikator und Divisionen mit mehrstelligem Divisor können nicht im Ansatz selbst ausgeführt werden; es sind daher Nebenrechnungen notwendig.

2. Das Ergebnis einer jeden Nebenrechnung muß wieder in den Ansatz eingefügt werden; darum ist ein nochmaliges Ansetzen erforderlich.

3. Ein und dieselbe Zahl muß häufig zweimal geschrieben werden, das einemal in der Nebenrechnung, das anderemal im Ansatz.

Es ist nun leicht begreiflich, daß durch dieses mehrmalige Ansetzen der Ziffern weder Zeit erspart, noch die Sicherheit der Lösung gefördert wird, daß vielmehr genau das Gegenteil stattfindet.

Völlig anders verhält es sich, wenn wir die Aufgabe in Divisionsform schreiben. Wir brauchen dann während der Ausrechnung jede Ziffer nur einmal anzusetzen und sind nicht mehr zu Nebenrechnungen gezwungen. Alle Operationen lassen sich im Ansatze selbst vollziehen. Überdies ist die Möglichkeit, sich zu irren, hier weit geringer, als bei der Bruchform. Rechenverstöße werden selten vorkommen, da eine Hauptursache derselben, nämlich das oftmalige Um- und Anschreiben der Zahlen wegfällt.

```
Arb. 17 | 773,50 M
        | 39 Arb.
--------------------
        |  6 961,50 M
        | 23 205,00 M
     17 | 30 166,50 M  =  1 774,50 M
        | 17
        | 131
        | 119
        |  126
        |  119
        |    76
        |    68
        |     85
        |     85
        |     —
```

Die Divisionsform ist nach dem allen (ich glaube es klar bewiesen zu haben) die geeignetste, die zweckmäßigste Art und Weise des Ansetzens; die Bruchform dagegen ist unpraktisch, sie verbietet sich von selbst, sie muß ganz und gar verworfen werden.

Die Rechenmethodik der Zukunft wird von einem Bruchsatze nichts wissen wollen, sie wird allein die Divisionsform als berechtigte Ansatzweise gelten lassen, und das nicht bloß aus praktischen, sondern auch aus theoretischen Gründen.

Was die modernen Methodiker zur Rechtfertigung ihrer Ansatzform nur immer vorbringen mögen, es läßt sich alles anstreiten und widerlegen.

1. Ist es überhaupt unstatthaft, eine Divisionsaufgabe in Bruchform anzuschreiben. Letztere soll nur für das Resultat des Teilens, d. i. für wirkliche Teile oder Bruchstücke gebraucht werden, also $\frac{1}{4}$ nur für den 4ten Teil eines Ganzen, $\frac{3}{4}$ nur für 3 mal den 4ten Teil eines solchen u. s. f.; sie darf aber nie und nimmer dazu verwandt werden, die Division selbst anzuzeigen. Durch diesen Gebrauch oder richtiger Mißbrauch verwirrt man unnötigerweise die Sache. Man weiß zuletzt nicht mehr, soll $\frac{3}{4}$ eine Bruchgröße, d. i. 3 Teile eines Ganzen, von welchen jeder ein Viertel ist, oder eine Division, also 4/3, d. i. 4 ist in 3 wie oftmal oder der 4te Teil von 3 beträgt wie viel? vorstellen. Es wäre endlich einmal Zeit, daß sich die Rechenmethodiker dahin einigten, in Zukunft die Divisionsaufgaben auch nur in Divisionsform anzusetzen und die Bruchform ausschließlich den wirklichen Brüchen d. i. den Teilen eines Ganzen aufzubehalten!*)

2. Die Bruchform ist aber ganz besonders ungeeignet bei Verhältnisrechnungen. Die meisten derselben bestehen aus ganzen Zahlen und führen auch in ihrem Ergebnis wieder zu solchen. Beispiel: 4 m 16 ℳ ? 5 m. Was hat nun dabei die Bruchform zu schaffen? Ist es nicht seltsam, wenn ich eine Aufgabe, die nur ganze Zahlen enthält, als Bruch darstelle, um schließlich wiederum eine ganze Zahl zu bekommen? Und erst wenn die Sache, welche in dieser Form angeschrieben wird, so beschaffen ist, daß ich sie überhaupt nur als ungeteilt, nie und nimmer aber als Bruchgröße denken kann, wie in dem Beispiel: 20 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; wie viel Arbeiter muß man anstellen, wenn sie in 5 Tagen fertig werden sollen? Ansatz: $\frac{20 \cdot 6}{5}$, wirkt dann unsere Ansatzweise nicht geradezu komisch? Ist es nicht absurd, sich die Anzahl der Arbeiter, wie es uns hier faktisch zugemutet wird, als 6 mal 20 Fünftelsmann vorzustellen? Wo in aller Welt laufen Viertels- und Fünftelsmenschen herum?

Ueber den Voransatz.

Mein Bestreben ist, den Schlußsatz möglichst zweckmäßig zu gestalten.

Unpraktisch war bisher die Bruchform des Ansatzes; ich verwerfe sie darum und verlange, daß man die Verhältnisrechnungen künftig nur in Divisionsform anschreibe.

Umständlich und darum unpraktisch ist ferner das zweimalige Ansetzen der Aufgabe, das einemal im Voransatz, das anderemal im

*) Selbstverständlich beziehen sich diese Behauptungen nur auf den Rechenunterricht an den Volksschulen.

Bruchsatz. Ich will deshalb untersuchen: Ist der Voransatz (Zweisatz) überhaupt notwendig, und wenn dies der Fall sein sollte, läßt sich derselbe nicht in eine zweckmäßigere Form kleiden, könnte man ihn nicht auf eine Weise anschreiben, daß sich seine Ziffern sogleich und ohne daß wir sie auf's neue ansetzen müßten, zum eigentlichen Rechenansatz verwenden lassen?

Ist der Voransatz notwendig?

Um diese Frage beantworten zu können, haben wir uns ins Gedächtnis zu rufen:

1. daß der Schlußsatz das Resultat des Schließens ist, daß er erst durch das Schließen entsteht und daß er vollendet wird mit der letzten Schlußfolgerung,

2. daß das Schließen und darum auch die Auffindung des Schlußsatzes unsern Kindern die größten Schwierigkeiten macht,

3. daß aus diesem Grunde dem Schüler ein Mittel an die Hand gegeben werden muß, durch welches ihm diese Arbeit erleichtert und die Herstellung des richtigen Ansatzes unter allen Umständen ermöglicht wird,

4. daß dieses Mittel allein in einem Voransatz, d. i. in einem Ansatze, der dem eigentlichen Urteilen und Schließen vorausgeht, bestehen kann.

Unsere Frage, ob ein Voransatz notwendig erscheint, ist daher mit einem entschiedenen Ja zu beantworten. Der Voransatz hat die richtige Beurteilung der Aufgabe unsern denkschwachen Kindern möglich zu machen; er ist insoferne berufen, eine wichtige Rolle zu spielen; er kann nicht entbehrt werden.

Gehen wir nun über zur Betrachtung der Eigenschaften, welche der Voransatz naturnotwendig besitzt!

1. Jeder Voransatz ist mehr oder weniger mechanisch und kann nicht anders als mechanisch sein, denn er ist ja bloß der Vorläufer des eigentlichen Denkens (Urteilens, Schließens), das erst anhebt, nachdem man ihn angeschrieben hat. Auch dem bisher üblichen Voransatz (Zweisatz) haftet der ausgesprochenste Mechanismus an. Ich betone dies deshalb, damit man gegen mich, wenn ich nun im Folgenden die Reesische Regel in Vorschlag bringen werde, nicht den Vorwurf erheben kann: ich redete der Wiedereinführung des geisttötenden Schulschlendrians vergangener Jahrhunderte das Wort.

2. Der Voransatz besteht in einer bestimmten Art und Weise, die Aufgabe überhaupt anzuschreiben; er hat die Glieder der Rechnung vorläufig zu ordnen, so daß dann leichter beurteilt werden kann, was mit ihnen geschehen soll. Er ist das übersichtliche Ansetzen eines Rechenexempels nach einer mechanischen Regel.

3. Der Voransatz hat das Schließen zu erleichtern und muß darum vor allem Frage- und Bedingungssatz kenntlich machen, sowie die korrespondierenden Glieder der beiden Sätze einander unmittelbar gegenüberstellen, so daß von der einen Größe auf die andere gleichnamige möglichst rasch übergegangen und geschlossen werden kann. Der Voransatz ist also notwendig Zweisatz, denn er bringt zwei Sätze (Frage- und Bedingungssatz) zur Unterscheidung.

Unwesentlich an ihm ist dagegen seine Form. Wie der eigentliche Rechenansatz (Schlußsatz), so ist er ebenfalls an keine einzelne bestimmte Darstellungsweise gebunden. Hauptsache bleibt, daß er den Fragesatz vom Bedingungssatz sondert, sowie die Zahlen vorläufig und zwar nach ihrer sachlichen Benennung ordnet. Wie er dies ausführt, ob auf diese oder jene Manier, das ist so ziemlich gleichgültig. Es ergibt sich daraus, daß sich jede Rechenregel, wenn sie nur die beiden Sätze ausgeschieden enthält, zum Voransatz verwenden läßt und daß sich aus diesem Grunde auch der Kettensatz, dessen stereotype Formel, in welche er jede Aufgabe kleidet, bekanntlich so lautet: „Wie viel macht, kostet, beträgt ꝛc. dies (Fragesatz), wenn jenes so und so viel macht, kostet, beträgt ꝛc.? (Bedingungssatz)" dazu eignen muß. — Wesentlich am Voransatz ist nur 1. sein Mechanismus, 2. daß er die Glieder der Aufgabe übersichtlich ordnet, 3. daß er jede Rechnung in Frage- und Bedingungssatz, somit in einen Zweisatz zerlegt.

Was nun den bis jetzt in unsern Schulen gebrauchten Voransatz, der, wie der verehrliche Leser wissen wird, auf folgende Weise angeschrieben wurde:

100 M.	bringen	in	1 Jahr	4 1/2 M.	Zinsen
950 „	„	„	9 Mon.	? „	„

(s. Böhme, Anltg. zum Rechenunt., S. 245) anbelangt, so habe ich daran manches zu bemängeln.

1. Macht hier das Auffinden des Voransatzes selbst unseren schwach talentierten Kindern erhebliche Schwierigkeiten, besonders wenn zusammengesetzte Verhältnisse gegeben sind.

2. Erleichtert derselbe, nachdem glücklich angesetzt ist, das Schlußverfahren nicht wesentlich. Er ordnet wohl die Aufgabe; er gibt aber keinen Fingerzeig, wo beim Schließen angefangen werden soll, auf welcher Seite vorzugsweise die Multiplikatoren, auf welcher die Divisoren zu suchen sind. Den Schwachkopf läßt er vollständig ratlos.

3. Muß bei der Umwandlung des Voransatzes in den Schlußsatz die ganze Aufgabe noch einmal angeschrieben werden.

4. Eignet er sich nur zur Berechnung von Aufgaben mit bloß einem Bedingungssatz, nicht aber zur Lösung von sogenannten Kettenrechnungen (Aufgaben mit mehreren Bedingungssätzen).

Neuer Rechenansatz, gebildet durch Vereinigung der Reesischen Regel mit dem Schlußsatz.

Ich verbinde die Reesische Regel, wie ich dies schon mehrmals angedeutet habe, auf das innigste mit dem Schlußsatz dadurch, daß ich sie als Voransatz gebrauche und dann durch logische Folgerungen in jenen umwandle. Auf diese Weise erhalte ich eine ungemein schöne, zweckmäßige, praktische Regel für die schriftliche Lösung, eine Regel, welche dazu bestimmt scheint, alle Ansätze aus alter, neuerer und neuester Zeit zu verdrängen. Wie nun unser neuer Rechenansatz beschaffen ist und wie er gehandhabt werden muß, davon soll sich der verehrliche Leser sogleich an folgenden Beispielen überzeugen.

Aufgabe: 4 m kosten 8 *M.*, ? 7 m.

Voransatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
M. ?	7 m	Wie viel *M.* kosten 7 m (Fragesatz),
m 4	8 *M.*	wenn 4 m 8 *M.* kosten? (Bedingungssatz).

Umwandlung des Voransatzes in den Schlußsatz: Man fängt bei dem linksstehenden untern Glied der Rechnung an: Wenn 4 m 8 *M.* kosten, so kostet 1 m den vierten Teil (die sachliche Bezeichnung, nämlich das „m" bei der Ziffer 4 wird durchstrichen, um den Schluß zu markieren) und 7 m kosten 7 mal so viel (die Sachbezeichnung, d. i. der Buchstabe „m" hinter der Zahl 7 wird wiederum durchstrichen).

Der Schlußsatz ist fertig!

Wir haben zwar noch dieselben Ziffern vor uns; wir haben außer dem Durchstreichen der sachlichen Benennungen nicht das Geringste an unserm ersten Ansatz geändert und doch ist er ein völlig anderer geworden. Die Umwandlung der Reesischen Regel in den Schlußsatz vollzieht sich eben rein innerlich, sie geschieht durch einen geistigen Prozeß. Äußerlich bleibt unser Ansatz sich gleich; denn nicht eine einzige neue Ziffer wird dabei geschrieben. In unserer Auffassung dagegen gestaltet er sich vollständig um. Wir sehen ihn nunmehr mit anderen Augen an; wir begreifen ihn erst; das Schlußverfahren hat uns sein Verständnis vermittelt; es hat, um es ganz kurz zu sagen, aus der mechanischen Reesischen Regel den Schlußsatz gemacht.

Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis: 4 Arbeiter fertigen einen Graben in 6 Tagen, wie lange werden 3 Arbeiter dazu brauchen?

Voransatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
Tg. ?	3 Arb.	Wie viele Tage brauchen 3 Arb. (Fragesatz),
Arb. 4	6 Tg.	wenn 4 Arb. 6 Tage brauchen? (Bedingungssatz.)

Umwandlung des Voransatzes in den Schlußsatz: Wieder fängt man bei dem untersten links stehenden Gliede an und schließt: Wenn 4 Arbeiter 6 Tage brauchen, so braucht 1 Arbeiter 4mal so lang, also wird mit 4 vermehrt (man durchstreicht dabei den ganzen Ausdruck „Arb. 4", d. h. die Ziffer mit der sachlichen Bezeichnung und schreibt die 4 auf die rechte Seite) und 3 Arbeiter brauchen den 3ten Teil der Zeit, also wird mit 3 geteilt (dabei durchstreicht man wieder das ganze Glied „3 Arb." und setzt die 3 auf die Divisorenseite).

Wir durchstreichen somit die Glieder „Arb. 4" und „3 Arb." und versetzen deren Ziffern. Das ist alles! Wie leicht macht sich die Umwandlung! Welcher geringen Zahl von Ziffern bedarf sie! Wie rasch führt sie zum Ziele! —

Und nun wende ich mich zur Widerlegung der Einwürfe, welche man gegen unsern Gebrauch der Reesischen Regel vorbringen könnte.

Man wird sagen:

1. daß diese Regel ihrem innersten Wesen nach Mechanismus ist und daß wir, indem wir sie in den Schulen wieder einzubürgern versuchen, reaktionären Bestrebungen huldigen, und

2. daß, sobald die Reesische Regel als Voransatz verwendet wird, es sich nicht mehr kontrollieren läßt, ob der Schüler wirklich gedacht und geschlossen und nicht vielmehr den Ansatz nur mechanisch und kopflos gehandhabt hat.

Was den ersten Einwand betrifft, so brauche ich ihn wohl nicht besonders zu widerlegen. Wir bedienen uns ja des Kettensatzes nur als Voransatzes und nicht als eigentlicher Rechenregel. Daß aber der Voransatz notwendig etwas Mechanisches sein muß, habe ich bereits oben ausführlicher erörtert.

Der zweite Einwurf ist triftiger. Es besteht in der That die Gefahr, daß der Schüler sich mit der Zeit der Reesischen Regel als eigentlichen Rechenansatzes bedienen und dann die Begründung und Umwandlung durch Schluß unterlassen wird. Dieser Eventualität beugen wir indes schon dadurch wirksam vor, daß wir den Kettensatz nur in einer einzigen Form zur Anwendung bringen und sonach auf die Ausnahmen: „Arbeiter und Zeit gehören zusammen 2c. 2c.", welche die alte Schule den Kindern einpaukte, verzichten. Da werden nun sehr häufig (nämlich so oft wir es mit einer Aufgabe mit umgekehrtem Verhältnis zu thun haben) zwei oder mehr Glieder der Rechnung auf der unrechten Seite, also die Multiplikatoren auf der Seite der Divisoren und die Divisoren auf jener der Multiplikatoren zu stehen kommen. Im voraus kann aber unser Schüler nicht wissen, ob irgend welche Zahlen im Ansatz versetzt werden müssen oder nicht, und darum ist er gezwungen, zu denken, zu schließen. Und wenn wir außerdem

dafür sorgen, daß Aufgaben mit geradem und solche mit umgekehrtem Verhältnis in möglichst bunter Mischung wechseln, so wird der gedankenlose, mechanische Gebrauch fast ganz unmöglich. Die Kinder sind dann nie sicher, welche Art von Beispielen sie vor sich haben, ob der Ansatz einer Umänderung bedarf oder nicht, was mit den einzelnen Gliedern der Rechnung geschehen muß u. s. w. Erraten läßt sich das nicht.

Schließlich will ich noch die Vorzüge, welche die Reesische Regel vor dem bisherigen Voransatz hat, in Kürze aufzählen:

1. Unsere Regel ist über alle Beschreibung leicht. Der schwächste, talentloseste Schüler vermag mittelst derselben eine jede Verhältnisaufgabe anzusetzen.

2. Kann sie ohne Umstände in den eigentlichen Rechenansatz umgewandelt werden. Wir kommen darum mit der Hälfte der Ziffern aus, welche der sogenannte Zwei- oder Bruchsatz verlangt.

3. Unterstützt sie das Schlußverfahren wesentlich und setzt selbst ganz Geistesschwache in den Stand, leichtere Verhältnisaufgaben selbständig zu lösen. Wenn dies auch auf eine mehr mechanische Weise geschehen sollte, was schadet es? Hauptsache bleibt doch, daß das richtige Resultat gefunden wird. Wer zum Urteilen und Schließen total unfähig ist, der mag getrost die Regel für sich denken, der mag sich von ihr den Verstand ersetzen lassen, der ihm abgeht. Besser ist es, etwas schlecht, als gar nicht erreichen.

4. Endlich läßt sich die Reesische Regel auch auf Verhältnisrechnungen mit mehreren Bedingungssätzen anwenden. Ungemein praktisch ist sie vor allem bei jenen Aufgaben, in welchen aus dem Preis für eine niedere Sorte (Stück, Dutzend ꝛc.) jener für die höhere (Mandel, Schock, Gros ꝛc.) gesucht, oder auch in welchen ausländisches Geld in inländisches umgerechnet werden soll.

Praktischer Teil.

Motto: Prüfet alles, behaltet das Gute,
benützet das Wahre!
Lavater „Worte des Herzens".

Die wichtigsten rechenmethodischen Grundsätze.

Nimm das Gute, wo du es findest, so lautet eine uralte, goldene Regel, so möge auch die Maxime lauten, welche wir bei der Ausarbeitung unseres praktischen Teiles befolgen werden.

Wir wollen uns nicht eigensinnig auf die rechenmethodischen Errungenschaften der letzten Dezennien beschränken, nein, wir wollen uns alles zu Nutzen machen, was jemals über Rechnen und Rechenunterricht Vernünftiges zu Tage gefördert wurde, wir wollen die Erbschaft der ganzen Vergangenheit, des ganzen Menschengeschlechtes antreten, nicht einer von den bisherigen verdienstvollen Methodikern soll umsonst gelebt, umsonst seinen Scharfsinn aufgeboten haben; was der praktische Sinn unserer Vorfahren bereits Zweckmäßiges entdeckt und geübt hatte, wollen wir dem Grabe der Vergessenheit entreißen und bereichert und berichtigt durch unsere eigenen Erfahrungen und theoretischen Forschungsergebnisse, neuerdings in den Schulen einführen und befolgen.

Unsere Methode sei die reife Frucht der ganzen seitherigen Entwickelung; sie fasse zur Einheit, zur Summe zusammen, was bis zur Stunde Praktisches erfahren, Mustergiltiges ersonnen und Richtiges und für immer Bleibendes festgestellt worden ist; von Pestalozzi entlehne sie die Forderung, daß der Schüler in das hellste Verständnis der Rechenvorgänge eingeführt werden müsse, von Diesterweg acceptiere sie das Prinzip der Selbstthätigkeit, von Grube das Drängen auf Veranschaulichung, von Eisenlohr, Erzinger und Goltzsch die wichtige Maxime, daß der Unterrichtsstoff aus dem Leben und für das Leben gewählt werden solle, von den Rechenmeistern der alten Schule endlich nehme sie den bewährten Grundsatz herüber, daß jede Spezies für sich zu behandeln und bis zum höchsten Grad der Fertigkeit zu üben sei.

Gehen wir nun daran, die allgemeinsten und beachtenswertesten Prinzipien eines wahrhaft rationellen und fruchtbringenden Rechenunterrichts aufzuzählen, zu ordnen und, soweit es nötig sein sollte, zu begründen und zu verteidigen.

I. Grundsatz: Das Rechnen der Volksschule hat nur eine Hauptaufgabe und kann nur eine haben, nämlich Erzielung der nötigen Rechenfertigkeit für Handel und

Verkehr. Dies wird klar, sobald wir uns darauf besinnen, was denn das Rechnen eigentlich zum Gegenstand der Volksschule gemacht hat; wir werden finden, daß es lediglich die Bedürfnisse des praktischen Lebens waren, und wenn wir dann logisch weiter schließen, so kommen wir zu dem Ergebnis, daß eben jene Bedürfnisse vor allem berücksichtigt und befriedigt werden müssen und daß wir also den Schüler in erster Linie in der gewandten und sicheren Lösung von einfachen, ungekünstelten, dem Alltagsverkehr entnommenen Aufgaben zu üben haben.

II. Grundsatz: Da aber der höchste Grad von Rechenfertigkeit nichts nützt, wenn man sie nicht anzuwenden versteht, so hat zu derselben noch das Rechenverständnis zu treten und zwar muß letzteres auf allen Stufen der mechanischen Einübung vorausgehen.

Das sind nach meiner Ueberzeugung die beiden Kardinalprinzipien, auf welchen die übrigen ruhen und aus welchen sie sich mit strenger Notwendigkeit ableiten lassen. Der erste Grundsatz entscheidet über das Was, der zweite über das Wie; jener bezeichnet das Lehrziel und den Lehrstoff, dieser dagegen die Lehrmethode; ersterer sagt: passe deinen Unterricht genau den Bedürfnissen des praktischen Lebens an! letzterer fordert: bringe alles zur hellsten Einsicht!

Sehen wir jetzt, zu welchen Konsequenzen unsere beiden Grundsätze führen.

Folgerungen aus dem ersten Prinzip.

In der Einleitung wurde bereits darauf hingewiesen, daß das Leben in Bezug auf das Rechnen hohe Anforderungen stellt und daß die Schule denselben nur dadurch zu genügen vermag, daß sie eben Zeit und Kraft möglichst weise und ökonomisch ausnützt, daß sie also den Stoff einesteils auf das Notwendigste und Wichtigste reduziert und anderenteils auf das zweckmäßigste gliedert und ordnet.*) Wir kommen somit zu folgenden zwei Konsequenzen oder untergeordneten Grundsätzen:

1. Konsequenz: Streiche alles Unnötige, Überflüssige, Entbehrliche und künstlich Erschwerende, also

a) in der Unterklasse der Volksschule die umständlichen und zeitraubenden Operationen: Zahlenzerlegen, Zahlenvergleichen und Zahlenergänzen,

b) in den mittleren und oberen Klassen alle komplizierten und unpraktischen Übungen, besonders aber die zu schwierigen Kopfrechenexempel und die sogenannten algebraischen Aufgaben.

---

*) s. „Zur Reform d. Rechenunt." Erste Abteil. München 1884 S. 17 u. 18.

2. **Konsequenz**: Suche deinem Lehrgegenstand die ihm angemessenste und natürlichste Gliederung und Stufenfolge zu geben! Behandle daher

a) eine Spezies **nach** der andern und zwar

b) die leichtere immer **vor** der schwierigeren! Treibe also etwa zuerst nur Zählen, darauf bloß Addieren, dann nur Subtrahieren u. s. w.!*)

Wer es beim Unterricht versäumt, jedes Pensum gründlich einzuüben, wird trotz aller Mühe, die er sich sonst geben mag, mit seiner Schule nur langsam fortschreiten können, sieht er sich ja doch, da die Kinder bei einem solchen Verfahren wohl vieles oberflächlich, aber nichts tüchtig und dauernd lernen, zu beständigen Wiederholungen gezwungen. Um Zeit und Kraft zu sparen ist sonach drittens notwendig, daß man von aller Anfang an auf peinlichste Genauigkeit bei der Einübung dringt und daß man nicht eher ein neues Pensum in Angriff nimmt, als bis nicht das bisherige vollständig beherrscht und verarbeitet ist. Was unserem Schüler geboten wird, das lerne er gründlich und richtig. So bald z. B. irgend eine Reihe des Einmaleins, etwa folgende: $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6 \ldots 10 \times 2 = 20$ gefunden ist, werde sie tüchtig memoriert, so daß ein jeder, der talentierte wie der schwachbegabte, sie hernach frisch und munter aufzusagen vermag und daß auch nicht einer sich lange zu besinnen braucht, wie viel 3×2, 9×2, 5×2 u. s. w. ist, kaum, daß die Frage gestellt wurde, hat auch schon die Antwort zu erfolgen, es muß gleichsam Schlag auf Schlag gehen; erst, wenn dies erreicht ist, darf man mit dem Aufsuchen und Einlernen einer neuen Reihe, also etwa der nachstehenden: $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9 \ldots 10 \times 3 = 30$ beginnen. Auf das tüchtige Memorieren verzichten hieße hier das Einprägen und Behalten der einzelnen Ergebnisse unnötig lange hinausschieben, hieße den Fortschritt der Kinder künstlich verzögern und Zeit und Kraft zum großen Teil nutzlos vergeuden. Also

3. **Konsequenz**: Halte auf peinlichste Genauigkeit beim Einüben und Memorieren des jeweiligen Unterrichtsstoffes und gehe nicht eher einen Schritt weiter, bis nicht das zuletzt Behandelte zum sicheren geistigen Eigentum der Schüler geworden ist.

Dieser Grundsatz bedarf indes einer Berichtigung oder Ergänzung, welche sich aus der Erfahrungsthatsache ergibt, daß auch das best Verstandene und best Gelernte spurlos vergessen werden kann, wenn es nicht zuweilen wieder rekapituliert und aufgefrischt wird. Mit

---

*) a. a. O., Seite 14.

der Einübung einer Sache bis zum höchsten Grade der Fertigkeit ist zwar schon viel, aber noch nicht alles geschehen. Unsere nächste Sorge muß sein, die einmal erworbene Fertigkeit nicht wieder verloren gehen zu lassen. Und diese Erwägung diktiert uns folgenden weiteren Grundsatz als

4. und letzte Konsequenz: Richte deinen Lehrgang und dein Lehrverfahren so ein, daß alle Übungen, die bereits durchgenommen wurden, auf den späteren Stufen immer wiederkehren und zwar, um keinen Überdruß zu erregen, womöglich in einer neuen und schwierigeren Form.

Nur durch Befolgung dieser vier wichtigen Grundsätze, welche wir soeben entwickelt haben, vermögen wir unser Ziel: Rechenfertigkeit für das Leben vollständig zu erreichen und die gesteigerten Anforderungen, welche unser fortgeschrittener Kulturstandpunkt an die Volksschule stellt und stellen muß, zu erfüllen.

Es ist also, um das oben Gesagte kurz zusammenzufassen, unbedingt notwendig, daß wir den Lehrstoff zweckmäßig reduzieren (1. Grundsatz), sodann möglichst praktisch und naturgemäß gliedern und verteilen (2. Grundsatz), ferner daß wir auf größte Genauigkeit beim Einüben halten und nicht eher eine Stufe verlassen, bis nicht jeder Schüler, vom ersten bis zum letzten, sich auf derselben heimisch und sicher fühlt (3. Grundsatz) und endlich daß wir bei jeder passenden Gelegenheit auf das früher Behandelte zurückgreifen und es dadurch vor der Gefahr des gänzlichen Vergessens bewahren (4. Grundsatz). Nur so werden wir den nötigen Raum gewinnen zur Behandlung von Sachverhältnissen, welche seither nur an Mittelschulen und auch da nicht eingehend genug besprochen und erläutert wurden, welche aber wegen ihrer eminent praktischen Bedeutung schon längst in der Volksschule hätten vorgeführt und betrachtet werden sollen, ich meine die wichtigsten Verhältnisse des geschäftlichen und gewerblichen Lebens, sowie das Wissenswürdigste aus dem Verkehr, dem Handel, der Großindustrie und dem Staatshaushalte.

Folgerungen aus dem zweiten Prinzip.

Wir wollen den Schüler in das hellste Verständnis der Rechenvorgänge einführen. Nun aber geht alle wahre und echte Erkenntnis von der Anschauung oder Erfahrung aus. Was nicht auf irgend eine Weise von uns wahrgenommen worden ist, davon besitzen wir auch kein wirkliches Verständnis. Worte können nur den Schein des Wissens erzeugen. Anschauung und Erfahrung dagegen sind der unversiegliche Quell, aus dem wir allein unsere Vorstellungen, Begriffe und Urteile, aus dem wir unsere Einsichten und Erkenntnisse schöpfen. Darum lautet unsere

1. **Konsequenz:** Gründe deinen ganzen Unterricht auf Anschauung und Erfahrung! — Es ist dies jenes wichtige Prinzip, das bereits der begeisterte Mund eines Pestalozzi verkündet hat, das jedoch bis zur Stunde fast nur in mißverstandener Weise zur Anwendung kam, indem man, getreulich in die Fußtapfen unseres Meisters tretend, das Rechnen genau nach der Schablone des naturgeschichtlichen oder Anschauungsunterrichtes zu lehren suchte. Es ist wahr, die Zahlen und Zahlenergebnisse können nur aus der Wahrnehmung erkannt werden, aber nicht aus der ruhenden Wahrnehmung oder Anschauung, sondern aus der fließenden, aus der Erfahrung. Auch wir werden beim ersten Rechenunterricht von Sinnendingen (Finger, Kugeln, Striche ꝛc.) ausgehen, jedoch nicht zu dem Zwecke, daß das Kind sie anschaue und sich ihr Bild, d. i. ihre besondere Gruppierungsweise, einpräge, sondern, daß es sie zähle. Die Ermittelung der den realen Mengen entsprechenden Zahlbezeichnungen (Namen und Ziffern), also das Zählen und nicht die Anschauung als solche ist es, was wir in betreff des grundlegenden Rechenunterrichts als Hauptsache erklären und worauf wir deshalb den Schwerpunkt verlegen werden. Im Prinzip, nämlich in der Forderung, alles Wichtigere zu veranschaulichen, stimmen wir mit Pestalozzi und den neuern und neuesten Methodikern gänzlich überein, in der Ausführung dagegen werden wir uns weit von ihnen entfernen. So viel zur Charakterisierung des Standpunktes, den wir zum Pestalozzischen Anschauungsprinzip, dem gerühmten Grundpfeiler des modernen Rechenlehrverfahrens, einnehmen wollen.

Laßt uns nun wieder zu unserem eigentlichen Gegenstand zurückkehren!

Dem Kinde soll alles Wichtigere zur Veranschaulichung und damit zum klarsten Verständnis gebracht werden, so heißt der Grundsatz, den wir oben entwickelt haben. Da drängt sich denn sofort die Frage auf: Wer soll die nötigen Veranschaulichungen vornehmen, der Lehrer oder der Schüler? Die Antwort darauf dürfte nicht schwer fallen.

Nur was der Schüler mit eigenen Augen wahrnimmt und mit dem eigenen Verstande durchdringt und erkennt, nur das versteht er ganz und wirklich, und nur was er selbst mit seinen Händen hervorgebracht hat, nur das vermag ihn wahrhaft zu befriedigen. Bloß angelerntes und aufgezwungenes Wissen und bloß eingedrillte und mit Widerwillen angeeignete Fertigkeiten sind ein totes Kapital, ein Kapital, das keine Zinsen trägt, ja das vielleicht in kurzer Zeit wieder vollständig verloren geht. Was dagegen durch eigene Kraft, durch freie, selbständige Bethätigung der angebornen Anlagen errungen wurde, das ist ein Vermögen, das von Jahr zu Jahr anwächst und das zu einer reichen Segensquelle wird für den Besitzer sowohl, wie

für seine Umgebung. Alles Selbsterworbene und wenn es an sich noch so geringfügig und unbedeutend sein sollte, weckt im Kinde notwendig Interesse am Unterrichte, Lust an der Arbeit, es spornt dasselbe an zu gesteigerter Aufmerksamkeit, zu anhaltendem Fleiße, zu regem Schaffen. — Der Gedanke, diese oder jene wichtige Wahrheit habe ich selbst entdeckt, diese oder jene nutzbringende Geschicklichkeit habe ich mir aus freiem Antriebe und ohne daß man mich dazu irgendwie genötigt hätte, angeeignet, gehört zu dem Beglückendsten und Erhebendsten, was die Menschenbrust überhaupt zu fühlen vermag; ihm wohnt aber zugleich eine ungemein veredelnde und versittlichende Kraft inne. Selbst und freudig erworbene Einsichten und Fertigkeiten sind nach meiner festen Überzeugung die ersten Anfänge zu einem entschiedenen, thatkräftigen, selbständigen, mit einem Worte männlichen Charakter; sie sind die Keime, die zarten Würzelchen, aus welchen die ganze spätere Denk-, Gesinnungs- und Handlungsweise mit strenger Naturnotwendigkeit ersprießt. Daraus folgt für unsere Lehrmethode als

2. Konsequenz: *Was das Kind selbst finden kann, das darf man ihm nicht vorsagen, und was es selbst hervorzubringen und auszuführen vermag, das muß man ihm eben auch selbst erzeugen, selbst produzieren lassen. Nur jener Unterricht ist wahrhaft gut, der zur Selbstthätigkeit nicht etwa bloß anregt, nein, der dazu zwingt.* — Unser Schüler sollte nach meiner Ansicht das ganze Einmaleins selbst suchen müssen durch Abzählen der Kugeln der Zählmaschine und der Striche, welche er sich auf seiner Schiefertafel zeichnet; er sollte sich sodann das volle Verständnis des Zahlensystems, sowie der schwierigeren Rechenoperationen selbst erholen durch eigenes sinnenfälliges Manipulieren mit den Pfennigen, Zehnpfennigen, Markstücken und Tausendersäckchen auf meinem Rechentische; endlich sollte er veranlaßt werden, alle für das Bruchrechnen wichtigen Thatsachen mittelst des Teillineals sich selbst klarzulegen, selbst zu veranschaulichen.

Um in das Verständnis einer Sache eindringen zu können, muß man derselben einen bestimmten Grad von Frische und Aufmerksamkeit entgegenbringen. Bei schläfrigen Sinnen oder auch im Zustand der Zerstreutheit und Gedankenabwesenheit sind wir unfähig, etwas Neues richtig und klar zu erfassen und zu behalten. Dasselbe gilt vielleicht in noch höherem Grade von Kindern. Wer in der Schule gestanden ist, weiß, wie rasch sich die Aufmerksamkeit und im Zusammenhang damit die Auffassungs- und Unterscheidungskraft der Schüler ändert und von welchen Zufälligkeiten es abhängt, ob sie dem Unterrichte mit Interesse und Nutzen anwohnen können oder nicht. Einen wichtigen Faktor bildet in dieser Beziehung die Tageszeit. Was des

Vormittags mit Leichtigkeit erfaßt und begriffen wird, das ist oft am Nachmittag der großen Mehrzahl ganz und gar unverständlich. Die Kindesseele ist ein wetterwendisches, unbeständiges Ding, zu allem Möglichen aufgelegt, aber bei keinem einzigen Gegenstand lange beharrend, von lebhaftem Wissensdrang erfüllt, doch unglaublich schnell ermüdet, übersättigt, gelangweilt. Was nun speziell den Rechenunterricht betrifft, so hat wohl jeder Lehrer schon erfahren, wie verhältnismäßig rasch und leicht sich ein gestecktes Pensum während der Vormittagsstunden bewältigen läßt, welchen großen Zeitaufwand und welche Mühe es dagegen erfordert, wenn man ganz dasselbe Pensum während des Nachmittags durchzuarbeiten versucht. Die Kinder verfügen dann eben nicht mehr über jenen Grad von geistiger Frische und Sammlung, der zu einer verständnisvollen Erfassung und Beherrschung unseres Gegenstandes erfordert wird. Man mag darum während dieser Tageszeit bereits Gelerntes noch besser einüben; die Einführung in das Rechenverständnis aber, die Inangriffnahme eines neuen Stoffes muß unter allen Umständen dem Vormittage vorbehalten bleiben. Also

3. Konsequenz: Weise auf deinem Lehrplane dem Rechnen die ersten Vormittagsstunden an und lasse des Nachmittags höchstens das am Morgen Behandelte wiederholen und noch besser einüben, denn nur so wird es dir gelingen, dem Kinde ein wirkliches Verständnis der Rechenoperationen zu geben und das Lehrziel in verhältnismäßig kurzer Zeit und bei möglichst geringem Kraftverbrauch zu erreichen.

Aber, könnte man fragen, ist denn das Rechnen nicht eine mechanische und mehr oder weniger gedankenlose Arbeit, was macht dann dasselbe als Unterrichtsobjekt so schwierig? Antwort: Lediglich der Umstand, daß wir es hier nur mit Namen und Ziffern und keineswegs mit deutlichen Vorstellungen zu thun haben. Mit größter Gemütsruhe spricht da einer beim Addieren: „9 und 3 ist 11 und 7 ist 16“, während er doch nicht einmal im Schlaf behauptet: „Blut ist grau und Milch ist schwarz“. Denn in letzterem Falle ist es die Vorstellung des Blutes, die Vorstellung der Milch, welche ein derartig widersinniges Urteil gar nicht aufkommen läßt, oder, wenn es dennoch in einem Moment der größten Gedankenlosigkeit gemacht werden sollte, es doch gleich danach korrigieren würde. Aber bei der Addition stellen wir uns weder die 9, noch die 3, noch die 7, noch viel weniger das Resultat aus diesen Zahlen wirklich vor und werden darum, wenn wir letzteres grundfalsch angeben sollten, durch nichts auf unseren Fehler aufmerksam gemacht. Ja, würde uns von jeder Zahl ein deutliches Bild vorschweben, dann wäre das Rechnen etwas leichtes, Rechenverstöße könnten nur selten vorkommen, und wenn sie

sich dennoch zuweilen einschleichen sollten, so würden sie sich doch ungemein rasch und sicher auffinden und verbessern lassen. Gerade der vollständige Mangel an deutlichen Zahlvorstellungen also ist es, welcher Irrungen so sehr begünstigt. Er ist es ferner auch, welcher zu einer besonderen Sorgfalt und Anstrengung zwingt. Der Rechner muß ganz bei der Sache oder richtiger bei der Ziffer sein, denn schon ein einmaliges Versprechen, eine einzige unrichtige Ziffer macht die ganze Lösung ungiltig und die Mühe, die er darauf verwandt hat, nutz- und ergebnislos. Das Rechnen ist und bleibt gewiß einer der schwierigsten Lehrgegenstände in der Volksschule, aber das nicht deshalb, weil es etwa die größten Anforderungen an den Verstand stellt, sondern umgekehrt, weil es sich so wenig an das Vorstellungsvermögen (den Verstand) und fast ausschließlich an das Wort- und Ziffergedächtnis wendet, weil es vom Kinde verlangt, es solle den Flug seiner so leicht beweglichen Einbildungskraft mit einemmal hemmen und es solle dafür bloß an die Ziffern, resp. die gesprochenen Zahlnamen, welche in ihrer Nüchternheit und Dürftigkeit doch gewiß keinen bestrickenden Reiz auszuüben vermögen, denken. Jedenfalls, und das ist eben die Folgerung, die wir oben gezogen haben, müssen dem Rechnen t r o t z oder vielmehr gerade w e g e n seines Mechanismus auf unseren Lektionsplänen die ersten Vormittagsstunden, während welcher der Schüler seine Aufmerksamkeit noch am meisten in der Gewalt hat, eingeräumt werden.

Dieser Folgerung wollen wir zum Schlusse noch nachstehende weiteren zwei anreihen, welche sich von selbst verstehen dürften und darum wohl schwerlich einer besonderen Begründung und Rechtfertigung benötigen.

4. Konsequenz: Suche jeden einzelnen Schüler zu ununterbrochener Aufmerksamkeit zu zwingen,

a) indem du es dir zum Gesetze machst, einen jeden in jeder Lektion mindestens einmal und zwar außer der Reihe aufzurufen, so daß er unmöglich darauf vorbereitet sein kann und

b) indem du von Zeit zu Zeit die ganze Masse und eben damit auch den einzelnen in Bewegung setzest. (Chorsprechen, Schreiben nach Diktat u. dgl.)

5. Konsequenz: Sollten sich während einer Lektion bei der ganzen Klasse die unverkennbaren Anzeichen von Überdruß und Abspannung einstellen, so verzichte für diesmal auf die Durchführung deines Pensums und nimm dafür Übungen vor, von denen du sicher weißt, daß sie den Kindern Vergnügen machen. Die kleineren magst du etwa rasch zählen lassen und zwar in der Art, daß der erste Schüler „1“, der zweite „2“, der dritte „3“ u. s. w. spricht, die

größeren mögen die Reihen des Einmaleins frisch und munter aufsagen oder schreiben, und wieder andere können sehr leichte Exempel aus ihrer Aufgabensammlung berechnen. Es ist merkwürdig, wie rasch durch diesen wohlthätigen Wechsel die eben erst in Brüche gegangene Aufmerksamkeit wieder gewonnen ist und welche sichtliche Freude gerade die mittelmäßig und schwach Talentierten dabei an den Tag legen. Dasselbe ist zu empfehlen, wenn du fühlst, daß es mit deiner Geduld für heute zu Ende geht, und daß du dich vielleicht schon im nächsten Augenblicke zu übertriebener Strenge wirst fortreißen lassen.

Ordnen der entwickelten Grundsätze.

I. Grundsätze für die Wahl des Stoffes.

1. Aus dem Leben und für das Leben. — Nur Praktisches.
2. Radikale Ausmerzung alles Überflüssigen, Entbehrlichen, Erkünstelten.
3. Berücksichtigung aller wichtigeren Lebensverhältnisse, darum Erweiterung des Lehrpensums nach jenen Richtungen, in welchen es durch die Anforderungen des Alltagsverkehrs geboten erscheint.

II. Grundsätze für die Verteilung des Stoffes.

1. Eines nach dem anderen.
2. Das Leichtere vor dem Schwierigeren.
3. Wiederkehr des bereits Behandelten auf späteren Stufen (Fortschreiten in konzentrischen Kreisen).
4. Verlegung des einführenden und darum schwierigeren Teiles der Rechenlektion auf den Vormittag, des bloß einübenden und wiederholenden auf den Nachmittag.

III. Grundsätze für die methodische Behandlung.

1. Ausgehen von Veranschaulichungen, welche sich der Schüler unter Anleitung des Lehrers selbst verschafft.
2. Üben jeder Spezies bis zur höchsten Fertigkeit, vor allem tüchtiges Memorieren des Einmaleins.
3. Zähes Verweilen bei einer wichtigeren Übung, bis sie vollständig beherrscht wird (Lückenloses Fortschreiten).
4. Genaues Anpassen des Lehrverfahrens an die Individualität des Einzelnen, wie auch an die jeweilige Stimmung oder Verfassung der ganzen Klasse.

I. Abschnitt.

Zählkurs oder die Neugestaltung des Rechenunterrichts in den ersten zwei Schuljahren.

Gegenstand: Zählen im Zahlenraum von 1 bis 100. Auffinden und Einüben des kleinen Einmaleins.

Lehrgang:

I. Hauptstufe: Bloßes Zählen, Schreiben und Lesen der Ziffern.

II. Hauptstufe: Das Einmaleins.

Im ersten Schuljahr ist außer dem bloßen Zählen und Zifferschreiben auch noch das Addieren und Subtrahieren, aber ohne Zerlegen beim Überschreiten des Zehners, zu üben. Letzteres, wie auch das Multiplizieren und Dividieren, bleibt dem zweiten Schuljahre vorbehalten.

Veranschaulichungsmittel: Kurze, senkrechte Striche, welche die Schüler selbst auf ihren Schiefertafeln ziehen und die Zählmaschine.

Das erste Schuljahr.

A. Übungen im bloßen Zählen und Zifferschreiben.

1. Lektion. Lehrer: „Wer von euch, Kinder, kann schon zählen? — Wie weit kannst du zählen? — Versuche es einmal! — Wer kann noch etwas weiter zählen? — Wer kann zählen, wie viel Fenster das Zimmer hat? — Wer kann mir sagen, wie viel Bänke in einer Reihe stehen? — wie viel in den zwei Reihen? — Aber Kinder mit dem Zählen ist es noch nicht abgethan, man muß auch, was beim Zählen herausgekommen ist, aufschreiben können, sonst vergißt man es wieder. Ihr habt gewiß schon gesehen, wie Vater und Mutter, wenn sie Geld empfangen oder ausgeben, ein Büchlein nehmen und etwas hineinschreiben. Was werden sie da hineinschreiben? —

Warum? — Gut! Das Aufschreiben der Zahlen wollen wir jetzt lernen, dann könnt ihr den Eltern bald helfen; ihr könnt dann aber auch selbst aufschreiben, was ihr in euer Sparbüchslein hineinbekommt. — Sagt mir nun, wie viel Öfen im Schulzimmer sind? — Im Schulzimmer ist also nur ein Ofen. Das wollen wir jetzt aufschreiben, damit wir es nicht vergessen. Seht, 1 macht man so! — Wer kann es nachmachen? — Das müßt ihr jetzt alle mit einander schreiben. Nehmet den Griffel in die Hand! Schreibt den 1 (Einser) recht groß in die Luft und sprecht dabei: schief auf, gerad ab! — Schreibt jetzt den 1 auf die Tafel und sprecht wieder: schief auf, gerad ab! — Noch einmal 1, aber nur die rechte Bankreihe spricht, die linke ist ruhig. — Wieder 1, die linke Reihe spricht!" u. s. w., u. s. w.

2. Lektion. Lehrer: „Was haben wir das letzte mal aufgeschrieben? — Wir haben also aufgeschrieben, wie viel Öfen im Schulzimmer sind. — Sagt mir nun auch, wie viel Katheder im Schulzimmer sind! — Schreibt es auf! — Schreibt auf, wie viel Fußböden und Weißdecken das Zimmer hat! — Sagt mir nun, was ihr nur einmal im Gesicht habt! — Gut, ihr habt also nur eine Stirne, eine Nase, einen Mund und ein Kinn. Das wollen wir aufschreiben! — Wenn ihr jetzt von eurem Vater einen Pfennig bekommt, was werdet ihr in euer Sparbüchlein hineinschreiben? Schreibt 1! — Wenn euch nun die Mutter auch einen Pfennig schenkt, was werdet ihr nun unter den ersten Einser schreiben? — Thut das!" u. s. w., u. s. w.

3. Lektion. Lehrer: „Heute wollen wir zählen, wie viel Finger wir an einer Hand haben. Ich werde es euch vormachen. Seht her! Zuerst mache ich eine Faust. Wenn ich: eins! spreche, ziehe ich den kleinen Finger in die Höhe, bei: zwei! den Ringfinger, bei: drei! den Mittelfinger u. s. f. — Wer kann es nachmachen? — Wer kann es noch besser? — Wer will recht laut dabei sprechen? — Ihr müßt es jetzt alle mit einander machen. Hebt die Faust in die Höhe! Faßt den kleinen Finger an, stellt ihn auf und sagt: 1! — den Ringfinger: 2! — den Mittelfinger: 3! den Zeigfinger: 4! den Daumen: 5! — Macht es noch einmal, aber die erste Bank spricht! — Zum zweiten mal, die zweite Bank redet, die anderen sind ruhig!" u. s. f. „Wir haben also wie viel Finger an einer Hand? — Wenn wir das aufschreiben wollten, so müßten wir einen 5 (Fünfer) machen. Der ist aber für euch noch zu schwer. Schreibt darum noch lauter Einser, aber schöner als das letzte mal! Den Aufstrich müßt ihr dabei recht fein machen, erst beim Abstrich dürft ihr andrücken".

4.—6. Lektion. Der Lehrer läßt sich von den Kindern vierfüßige Tiere (Hund, Katze, Pferd ꝛc.), dann viereckige Dinge (Tafel, Buch ꝛc.) und endlich Hausgeräte mit vier Füßen (Tisch, Stuhl, Kasten ꝛc.) aufzählen, übt hernach die Ziffer „4" mit ihnen ein und

läßt sie schließlich wieder zum Aufschreiben verwerten. Dabei kann er sie mit der 1 abwechseln lassen, indem er etwa verlangt: „Schreibt auf, wie viel Wände, Fußböden, Winkel, Weißdecken unser Zimmer hat! — Schreibt, wie viel Platten, Schubladen, Ecken und Füße am Tisch sind! — Ihr habt von eurer Schwester 1 Pfg., von eurer Mutter auch 1 Pf. und von eurem Vater 4 Pfg. erhalten; wie werdet ihr das aufschreiben?“ u. s. w.

Wenn wir nach der Ziffer 1, nicht die 2, sondern die 4 einüben lassen, so geschieht dies, weil wir die Schreibschwierigkeit in Betracht ziehen und weil wir auch hier den goldenen Grundsatz: Vom Leichteren zum Schwierigeren! befolgen. — In der 4. bis 6. Lektion kann man außerdem noch das Fingerzählen von 1 bis 5, sowie das Zeichnen von kleinen Strichgruppen (je 4 oder 5 kurze, senkrechte Striche dicht neben einander, also |||| |||| oder ||||| ||||| rc.) üben. Das bringt den Kindern erwünschte Abwechslung und fördert zugleich ihre Fertigkeit im Zählen. Wenn man darauf hält, daß jeder Schüler in jeder Lehrstunde wenigstens einmal zum Sprechen kommt und wenn man, wie dies auch Pflicht des Lehrers ist, besondere Sorgfalt auf die schwächeren verwendet, so wird wohl auch der blödsinnigste nach der 5. oder 6. Lektion bis 5 rasch und sicher zählen können. Das wäre immerhin ein hübscher und nicht zu unterschätzender Erfolg.

7.—9. Lektion. Namen der sieben Wochentage. Einüben der Ziffer 7. Verwerten derselben zum Aufschreiben von kleinen Ersparnissen, z. B. Karl hat 7 Pfg. bekommen, dann 4 Pfg., darauf 1 Pfg., hernach wieder 7 Pfg. rc. — Zählen bis 10 an den Fingern, sowie an Strichgruppen, welche die Schüler selbst auf ihre Schiefertafeln zeichnen.

Nachdem die Kinder die Ziffern 1, 4 und 7 schreiben gelernt haben, so wird auch die Schreibung der übrigen keine besonderen Schwierigkeiten mehr verursachen. Ich halte es darum für angezeigt, daß man nun die Ziffern der Reihenfolge nach vorführt und einübt. Man mag dabei wieder mit der 1 beginnen, nur muß man jetzt darauf sehen, daß sie nun ungleich sauberer und richtiger als seither geschrieben wird. Auch mit dem Zählen an der Zählmaschine dürfte man nunmehr anfangen.

10. Lektion. Lehrer: „Wir wollen zählen, wie viel Kugeln auf der ersten Stange der Zählmaschine stecken. Das muß aber schön langsam und gleichzeitig geschehen. Wenn ich die erste Kugel vorgeschoben habe, so sprecht ihr: 1!, wenn die zweite daran hingedrückt ist: 2!, wenn ihr die dritte daneben seht: 3! u. s. w. — Gut! Die linke Bankreihe spricht, die rechte hört zu! — Die rechte Bankreihe spricht! — Wer will für mich die Kugeln verschieben? — Wer traut

sich ganz allein an der Zählmaschine zu zählen! — Nun muß einer nach dem anderen von euch heraus und die Kugeln beim Zählen verschieben, also zuerst der erste in der Bank, darauf der zweite, dann der dritte u. s. f. — Wie viele Stangen an der Zählmaschine haben wir heute abgezählt? — Also nur eine Stange. Schreibt die Ziffer 1, aber so schön als ihr nur immer könnt."

11.—14. Lektion. Zählen an der Maschine von 1 bis 10 und von 11 bis 20. Einüben der Ziffer 2 und zwar zuerst der vorderen Hälfte, dann der hinteren und zuletzt erst der ganzen Ziffer. Sprechübungen: „Was hat der Mensch zweimal? (Augen, Ohren ꝛc.) — Wie viele Füße hat eine Taube, eine Ente ꝛc.? — Wie viele Flügel hat ein Spatz, eine Schwalbe? — Zwei Dinge, die zusammengehören, nennt man ein Paar. Wie viel Paar Augen, Ohren, Hände ꝛc. hat jeder von euch? — Wie viel Paar Füße und Flügel hat die Gans? — Welche Kleidungsstücke sind immer paarweise vorhanden? (Strümpfe, Stiefel, Handschuhe ꝛc.) — Was gilt eine Doppelmark? — was ein Zweiring?"

15.—18. Lektion: Zählen an der Maschine bis 30. Einüben der Ziffer 3, zuerst der oberen Hälfte, dann der unteren und darauf erst wieder der ganzen Ziffer. Stoff zu Sprechübungen bilden: ein Dreieck, das der Lehrer an der Wandtafel vorgezeichnet hat, dann dreieckige Dinge, z. B. die Kelle, das Winkelmaß, der Triangel und der Giebel am Haus.

19.—21. Lektion: Zählen an der Maschine bis 40. Schönschreiben der Ziffer 4. Verwertung der Ziffern 1 bis 4 zur Notierung von kleinen Einkäufen. Beispiel: „Schreibt auf, was der kleine Max ausgibt, wenn er sich einen Griffel kauft um 1 Pfg., einen Federhalter um 3 Pfg., eine Stahlfeder um 2 Pfg., einen Bleistift um 4 Pfg., eine Semmel um 3 Pfg. und einen Apfel um 2 Pfg!"

22.—24. Lektion: Zählen an der Zählmaschine von 1 bis 50 Einüben der Ziffer 5. Sprechübungen: „Der Mensch hat an jeder Hand fünf Finger, sie heißen: Daumen ꝛc. — An jedem Fuß hat er fünf Zehen. — Wir haben fünf Sinne: Gesicht, Gehör, ꝛc. — Das Fünfpfennigstück ist aus Nickel und gilt 5 Pfg. — Das Fünfmarkstück ist aus Silber und gilt 5 Mark. — Auch gibt es Fünfmarkstücke, die aus Gold geprägt sind." (Selbstverständlich müssen die Geldstücke, von welchen wir mit unseren Kindern sprechen, also das Fünfpfennigstück, Fünfmarkstück ꝛc. ihnen auch wirklich gezeigt werden. Denn nur so entspricht unser Unterricht der wichtigen Forderung der Anschaulichkeit). Praktische Verwertung der Ziffern 1 bis 5 zum Aufschreiben von Ausgaben, Ersparnissen u. dgl.

25.—27. Lektion: Zählen an der Zählmaschine bis 60. Erlernen der Ziffer 6. Sprechübungen: „Die Fliege hat 6 Füße, der

Maikäfer hat 6 Füße. — Wer kann mir noch andere Tiere mit 6 Füßen nennen?" Praktische Verwertung der Ziffern 1 bis 6, ähnlich wie oben.

28.—30. Lektion: Zählen an der Zählmaschine bis 70. Schönschreiben der Ziffer 7. Verwertung der Ziffern 1 bis 7.

31.—33. Lektion: Zählen an der Zählmaschine bis 80. Erlernen der Ziffer 8. Praktische Verwertung der Ziffern 1 bis 8.

34.—36. Lektion: Zählen an der Zählmaschine bis 90. Einüben der Ziffer 9. Praktische Verwertung der Ziffern 1 bis 9.

37.—40. Lektion: Zählen an der Zählmaschine bis 100. — Es wird nun den Kindern zum Bewußtsein gebracht, daß an jeder Stange zehn Kugeln und zwar einmal zehn Kugeln stecken und dann erst wird zur Erlernung der Ziffer „10" geschritten. Der Lehrer mag dabei etwa auf folgende Weise verfahren: „Wie viele Kugeln stecken auf der ersten Stange? (Antwort: Zehn Kugeln.) Wie oftmal zehn? (Antwort: Einmal zehn.) — Gut! Schreibt 1! — Seht, dieser Einser sagt mir, daß einmal zehn oder kürzer, daß zehn Kugeln an der Maschine stecken. Er ist also kein gewöhnlicher Einser, er ist vornehmer, als die, welche wir bis jetzt geschrieben haben. Vornehme Herren haben aber immer einen Bedienten bei sich und zwar geht der vornehme Herr voraus, der Bediente hinterdrein. Auch unser Einser muß einen Bedienten bekommen. Warum? (Antwort: Weil es kein gewöhnlicher Einser, sondern ein vornehmer ist, weil er zehn gilt.) — Wohin werde ich den Bedienten unseres Einser schreiben oder zeichnen? (Antwort: Hinter den Einser.) — Warum das? (Antwort: Weil der Bediente nicht vorausgehen darf.) — Seht! Den Bedienten unseres Einsers schreibt man so! — Wer weiß, wie man diese Ziffer nennt? (Antwort: Null.) — Welche Ziffer ist mehr wert, unser Einser oder die Null? — Wie viel ist unser Einser wert? (Antwort: Zehn.) — Woran kennt man auf den ersten Blick, daß hier der Einser nicht eins, sondern zehn gilt? Ich will es euch sagen. Man erkennt dies daran, weil er einen Bedienten (eine Null) bei sich hat und vorausgeht. — Was gilt der Bediente unseres Einsers, die Null? — Richtig! Die Null gilt nichts. Es ist hier wieder geradeso, wie bei einem vornehmen Herrn und seinem Bedienten. Der vornehme Herr ist reich und gilt viel, der Bediente dagegen ist arm und lebt von seinem Herrn; wenn ihn sein Herr davonjagt, so hat er nichts. — Was gilt also unser Einser? (Antwort: Zehn.) — Woran kennst du, daß unser Einser nicht Eins, sondern Zehn gilt? (Antwort: Ich kenne dies daran, weil er einen Bedienten bei sich hat und vorausgeht.) — Was gilt die Null? (Antwort: Nichts.) — Was gelten alle zwei Ziffern zusammen? (Antwort: Zehn.) — Wie schreibt man „10"? (Antwort: Zuerst 1, dann 0.) — Gut! Einser könnt ihr schon längst schreiben, aber noch keine Nullen; die wollen

wir jetzt lernen. Seht mir noch einmal genau zu, wie ich es mache! — Schreibt nun recht viele 0 auf eure Tafeln!“

Ist die Ziffer „0“ gut geübt, so deutet der Lehrer wieder auf die erste Stange der Zählmaschine und fragt: „Wie viele Kugeln sind das?“ Kinder: „Zehn!“ — Lehrer: „Wie oftmal zehn?“ — Schüler: „Einmal zehn!“ — Lehrer: „Wie schreibt man einmal zehn?“ — Schüler: „Zuerst 1, dann 0!“ — Lehrer: „Wie viele Kugeln stecken auf der zweiten Stange?“ — Schüler: „Wieder Zehn!“ — Lehrer: „Schreibt es! Schreibt jetzt auch, wie viel auf der dritten Stange sind! — auf der vierten Stange! — auf der fünften!“ u. s. w.

Schließlich werden die Ziffern 1 bis 10 von den Schülern neben einander geschrieben und zwar zuerst nach Vorschrift von der Wandtafel, dann nach Diktat, und zuletzt frei aus dem Gedächtnis.

An Geldstücken ist vorzuzeigen das Zehnpfennigstück und das Zehnmarkstück.

Schreiben und Lesen der Ziffern von 11 bis 100.

1. Übung: Die Ziffern von 11 bis 20. — Der Lehrer läßt an der Zählmaschine von 1 bis 20 zählen und zwar wählt er sich einen schwächeren Schüler, der im Zählen noch erst befestigt werden soll. Dann verlangt er: „Stecke 11 Kugeln an der Maschine an! — Wie viel Kugeln sind auf der oberen Stange? (Antwort: Zehn.) — Wie oftmal zehn? (Antwort: Einmal zehn.) — Schreibt auf eure Schiefertafeln 1! — Wie viele Kugeln stecken auf der zweiten Stange? (Antwort: Eine!) — Schreibt hinter den 1, den ihr soeben gemacht habt, noch einen zweiten 1! — Was gilt der vordere 1? (Antwort: Zehn.) — Warum zehn und nicht eins? (Antwort: Weil er einen Bedienten bei sich hat und vorausgeht.) — Was gilt der hintere 1! (Antwort: Eins.) — Was gelten beide zusammen? (Antwort: Zehn und eins oder elf.) — Wie wird also 11 geschrieben? (Antwort: Zuerst 1 und dann nochmal 1!) — Stecke nun 12 Kugeln an der Zählmaschine an! — Wie oftmal zehn Kugeln sind auf der ersten Stange? (Antwort: Einmal zehn.) — Schreibt auf eure Tafeln. 1! — Wie viele Kugeln sind auf der zweiten Stange? (Antwort: Zwei.) — Macht hinter den 1, den ihr soeben geschrieben habt, noch einen 2! — Was gilt der 1? (Antwort: Zehn.) — Warum zehn? — (Weil er eine begleitende Ziffer bei sich hat und vorausgeht.) — Was gilt der 2? (Antwort: Zwei.) — Was gelten beide Ziffern zusammen? (Antwort: Zehn und zwei oder zwölf.) — Wie wird demnach 12 geschrieben? (Antwort: Zuerst 1, dann 2!) — Schiebe 13 Kugeln an der Zählmaschine vor! — Wie oftmal zehn sind auf der ersten Stange? — Schreibt: 1! — Wie viele Kugeln sind auf der zweiten? — Schreibt 3! — Was gilt der 1? (Antwort: Zehn.) — Warum zehn? — Was gilt der 3? — Was gelten beide Ziffern zusammen? — Wie schreibt man 13?“ — u. s. w.

Schließlich heißt es: „Schiebe 20 Kugeln vor! — Wie oftmal zehn sind es? (Antwort: Zweimal zehn.) — Schreibt auf euere Tafeln: 2! — Sind außerdem noch Kugeln angesteckt? (Antwort: Nein.) Macht hinter dem 2 eine 0! — Was gilt die vordere Ziffer, nämlich der 2? (Antwort: Zwanzig.) — Woran kennst du, daß sie zwanzig und nicht etwa bloß zwei gilt? (Antwort: Weil sie noch eine Ziffer bei sich hat und vorausgeht.) — Was gilt die hintere Ziffer, die Null? (Antwort: Nichts.) — Was gelten beide Ziffern zusammen? (Antwort: Zwanzig)."

Sind die Ziffern von 11 bis 20 vollständig entwickelt, so läßt man sie vielmals nacheinander und zwar abwechslungsweise von Einzelnen und dann wieder im Chor in und außer der Reihe lesen, man läßt sich sodann den Wert jeder einzelnen Ziffer angeben, indem man z. B. auf die 17 deutet und fragt: „Was gilt der 1? (Antwort: Zehn.) — Warum? — Was gilt der 7? — Was gelten die beiden Ziffern zusammen?", endlich läßt man die Zahlen schreiben zuerst nach Vorschrift von der Wandtafel, darauf nach Diktat und schließlich wieder frei aus dem Kopfe.

Sachliche Belehrungen: 1. Die innerhalb 20 liegenden Zählmaße, nämlich das Dutzend und das Mandel. — Fragen: Wie nennt man 12 Stück? 15 Stück? Was wird dutzendweise verkauft? — 2. Vorzeigen und Besprechen des Zwanzigpfennig- und Zwanzigmarkstückes.

2. Übung: Zählen und Zifferschreiben von 21 bis 30. — Lehrer: „Schiebe 21 Kugeln vor! — Wie oftmal zehn Kugeln sind es? (Antwort: Zweimal zehn.) — Schreibt: 2! — Wie viele Kugeln haben wir außerdem noch? (Antwort: Noch eine.) — Schreibt: 1! — Was gilt die vordere Ziffer? (Antwort: Zwanzig.) — Was die hintere? (Antwort: Eins.) — Was beide zusammen? (Antwort: Ein und Zwanzig.)" u. s. f., wie bei der 1. Übung. — In der Schönschreibstunde wird vor allem die Ziffer „2" geübt.

3. Übung: Zählen und Zifferschreiben von 31 bis 40.
4. Übung: „ „ „ „ 41 „ 50.
5. Übung: „ „ „ „ 51 „ 60.
6. Übung: „ „ „ „ 61 „ 70.
7. Übung: „ „ „ „ 71 „ 80.
8. Übung: „ „ „ „ 81 „ 90.
9. Übung: „ „ „ „ 91 „ 100.

Bei der schriftlichen Darstellung muß man auf Nettigkeit und Sauberkeit dringen. Der Schüler soll die Ziffern so schön machen, als es ihm nur immer gelingt. Ganz besondere Sorgfalt aber hat man bei der dritten Übung auf die Schreibung der Ziffer „3", bei der vierten auf jene der „4" u. s. f., bei der neunten endlich auf die Darstellung der Ziffer „9" zu verwenden. Neben jeder Rechenlektion laufe eine Schönschreibübung her.

Auch das Zählen muß nun zur größten Fertigkeit gebracht werden. Nach Behandlung der 9. Übung darf sich nicht ein einziger Schüler mehr finden, bei dem es in dieser Beziehung noch hapert. Unser Lehrgang gibt ja hinreichend Gelegenheit, um auch den schwächst begabten nachzubringen.

Schlußübung: Die Ziffern von 1 bis 100 werden vorerst der Reihe nach von der Wandtafel und später auch aus dem Gedächtnis geschrieben, dann werden sie außer der Reihe diktiert, endlich werden sie zur Notierung von Ersparnissen, Ausgaben u. dgl. verwendet.

Man läßt den Schülern bemerken und einprägen, daß bei den Zahlen, die auf „zehn“ auslauten, wie dreizehn, neunzehn, siebzehn ꝛc. immer der „1“ vorauskommt, bei den Zahlen, die auf „zwanzig“ ausgehen, der „2“, bei den „Dreißigern“ der „3“ u. s. w. Wenn nun einer in Zweifel sein sollte, wie die Zahlen „13“ und „31“ geschrieben werden müssen, dann fragt man einfach: „Was kommt bei Zehn voraus? (Antwort: Bei Zehn kommt immer der 1 voraus.) — Dreizehn schreibt man also wie? (Antwort: Zuerst 1, dann 3.) — Was kommt bei Dreißig voraus? (Antwort: Der 3.) — Wie wird demnach 31 geschrieben? (Antwort: Zuerst 3, dann 1).“ — Diese Regel, welche auch dem einfältigsten Schüler das richtige Lesen und Schreiben zweistelliger Zahlen zu einem Spiel macht, halte ich für so wichtig, daß man sie nach meiner Ansicht nie mehr in Vergessenheit kommen lassen darf. Während des ganzen zweiten Schuljahres ist beständig daran zu erinnern und darauf zu verweisen und auch in den mittleren und oberen Klassen muß man sie wenigstens für unsere Geistesarmen von Zeit zu Zeit auffrischen.

Zunächst mag man mündliche Übungen über die Schreibung der Zahlen daran anschließen, also: „Wie schreibt man 27? (Antwort: Zuerst 2, dann 7.) — Wie 53? (Antwort: Zuerst 5, dann 3)“ u. s. w., u. s. w.

An der Zählmaschine hat man den Kindern endlich noch das rasche Zählen mit „Zehn“ zu lehren, indem man ihnen die Kugeln der ersten Stange vorschieben und „zehn“ sprechen läßt, dann verlangt, sie sollen nun auch die Kugeln der zweiten Stange vorrücken und dazu „zwanzig“ sagen, darauf die der dritten Stange, während sie „dreißig“ sprechen u. s. f. Diese Übung hat zum Zweck, die Schüler im Fortschreiten von einem Zehner zu einem anderen sicher zu machen. Sie sollen sich nicht lange besinnen müssen, daß auf 29 die Zahl 30, auf 39 die 40 u. s. w. folgt.

Die erste Hauptstufe des Zählkurses ist beendet. Sie beansprucht zu ihrer praktischen Durchführung ungefähr drei Monate. Der Schüler bringt es auf derselben zur größten Sicherheit im Zählen, sowie

im Lesen und Schreiben der Ziffern innerhalb des Zahlenraumes 1 bis 100. Das Zifferschreiben stellen wir dabei von allem Anfang an in den Dienst des praktischen Lebens; wir gebrauchen es als ein Mittel zum Aufschreiben von Geldbeträgen u. dgl.; wir lassen den Kleinen mittelst der Ziffern Einkäufe und Ersparnisse notieren; das macht ihnen viel Spaß und bewirkt außerdem, daß sie, bei der Wichtigthuerei, welche ja eine Haupteigenschaft unserer Anfänger ist, sich zu Hause vor den Eltern und Geschwisterten produzieren und damit zugleich im Zählen und Zifferschreiben noch besser einschulen werden.

Wer mein Verfahren befolgt, der wird staunen, wie leicht sich alles macht, wie rasch und glatt es sich abwickelt, wie selten seine Geduld auf die Probe gestellt wird. Die Kinder sind ja nun mit ganzer Seele bei der Sache, die Rechenlektionen sind ihnen zu Stunden der Erholung, der freudigsten, genußreichsten Bethätigung ihrer Kräfte geworden. Alle unsere Schüler, vom ersten bis zum letzten, lernen mit Lust und Liebe. Es entspinnt sich ein wahrer Wetteifer zwischen ihnen. Keiner will zurückbleiben. Selbst dem schwächst talentierten wächst der Mut; denn er fühlt, daß er mitthun kann, ja daß er bei einigem Fleiße sogar mit den besten zu rivalisieren vermag. Und wenn es nun der Lehrer nicht an aufmunternden Lobsprüchen, Anerkennungen, Auszeichnungen fehlen läßt, dann kann er gerade an den von Mutter Natur stiefmütterlich Bedachten sein blaues Wunder erleben. Ich spreche hier keine bloßen Vermutungen, ich spreche vielmehr Erfahrungen aus, die ich in meiner eigenen Schule zu machen Gelegenheit hatte. Da habe ich, um nur einen einzigen eklatanten Fall herauszugreifen, in meiner vordersten Bank einen Schüler sitzen, dem man auf den ersten Blick den Kretin ansieht. Die Stirne ist niedrig und affenartig zurückgedrängt, die Augen starren blöd und teilnahmslos in die Welt hinaus, die Zunge ist schwerfällig, jede Bewegung ist über alle Beschreibung unbeholfen, eckig, linkisch. Wenn du ihn nach seinem Namen fragst, so antwortet er dir mit einem unverständlichen Geflüster. Sätze, die aus mehr als drei oder vier Worten bestehen, kann er unmöglich nachsprechen. Deinen eifrigsten Bemühungen, ihn zum Reden zu bringen, setzt er konsequentes Stillschweigen entgegen. Du magst ihm die verlockendsten Dinge als Belohnung in Aussicht stellen oder auch unter der Geberde des Unwillens und Zornes mit Strafe drohen, alles erweist sich als vergeblich. Nicht Schüchternheit oder Eigensinn also ist es, was ihm den Mund verschließt; der Fehler liegt offenbar tiefer, er ist in einer unglücklichen geistigen und physischen Organisation zu suchen. Das dürfte klar aus dem Umstande erhellen, daß er sich selbst seinen Spielkameraden nur durch Lallen unzusammenhängender Worte verständlich zu machen vermag. Dieses Prachtexemplar von einem Schüler nun frequentiert

unsere Anfangsklasse schon seit dem dritten Jahre. Seine beiden früheren Lehrer wußten nichts mit ihm anzufangen und ließen ihn gehen. Auch ich hatte nach den ersten vergeblichen Versuchen alle Hoffnung aufgegeben. Da bemerkte ich denn eines Tages, als eben ein fähigerer Schüler hinter der Zählmaschine stand und unter lautem Zählen die Kugeln verschob, wie mein armer Kretin den Vorgang mit sichtlichem Interesse verfolgt und dabei die Lippen bewegt, als wollte er mitsprechen. Auf meine Frage: „Willst du es gar auch versuchen?“ antwortete er mit einem freudigen Kopfnicken. Flugs war er heraußen und nun kam es verständlich, wenn auch noch im Flüstertone von der Zunge, während die Hand eine Kugel nach der anderen verrückte: „Nnneins, nnndei, nnndrei,“ u. s. w. Seit diesem Augenblick gehört er zu meinen eifrigsten Rechenschülern.

Während er bei den übrigen Lehrgegenständen teilnahmslos vor sich hinstarrt, entwickelt er beim Rechnen eine Aufmerksamkeit, Munterkeit, Frische, die wohl niemand hinter ihm suchen würde. Kaum daß die Frage gestellt ist, meldet er sich auch schon zum Worte. Und wenn er gerufen wird, dann entledigt er sich seiner Aufgabe mit einem Selbstgefühl und einer Gravität, welche deutlich zu erkennen geben, daß er weiß, um was es sich handelt. Freilich hat es mir viele Mühe gekostet, ihn zum lauten Sprechen zu bewegen. Nun aber ist auch das glücklich erreicht. Und jetzt, da ich diese Zeilen zu Papier bringe, genau nach einem halben Jahre, daß ich jenes Fünkchen mathematischen Talentes bei ihm entdeckt habe, vermag er bis 100 fertig zu zählen, sämtliche Ziffern innerhalb dieses Raumes in und außer der Reihe korrekt zu schreiben und zu lesen, sowie die Additions- und Subtraktionsreihen des kleinen Einmaleins munter aufzusagen. Und wer sich überzeugen will, ob er die Sache denn auch wirklich versteht und nicht bloß papageimäßig herplappert, der braucht bloß irgend eine Wahrheit des Einsundeins oder Einsvoneins zu bestreiten, also z. B. das $7 + 4 = 11$ ist, sogleich wird unser kleiner Professor mit hochwichtiger Miene die Kreide in die Hand nehmen und wird das fragliche arithmetische Axiom an der Tafel ad oculos demonstrieren, indem er 7 Striche und 4 Striche zeichnet und von eins ab laut durchzählt. — Bedenkt man nun, daß dieser Knabe in allen anderen Lehrgegenständen, namentlich im Lesen und Schreiben, bis zur Stunde in den allerersten Anfängen stecken geblieben ist, so müssen seine Fortschritte im Rechnen, welche ich mir nur aus der wahren, echten Natürlichkeit und Einfachheit meiner Methode zu erklären vermag, um so mehr überraschen.

B. Die leichteren Übungen im Addieren und Subtrahieren.

Das vollständige Einsundeins und Einsvoneins, wie es uns in den alten Einmaleinstabellen geboten wurde, begreift alle Ergebnisse in sich, welche durch das Zu- und Abzählen der Grundzahlen zu, resp. von einander entstehen. Es führt darum nicht bloß Resultate auf, die dem ersten Zehner angehören, z. B. 7 + 2 = 9, 10 — 6 = 4 ꝛc., sondern zum Teil auch solche, welche sich schon innerhalb des zweiten bewegen oder welche doch wenigstens in denselben hineinreichen, z. B. 7 + 4 = 11, 12 — 6 = 6 ꝛc. Man kann diese letzteren Ergebnisse durch einfaches Zählen finden, also dadurch, daß man, um gleich an eines der vorstehenden Beispiele anzuknüpfen, 7 Striche und 4 Striche zeichnet und von eins ab durchzählt. Es ist dies die leichteste, verständlichste, einfachste Ermittlungsweise, welche sich daher vorzüglich für das erste Schuljahr eignet. Man kann aber jene Wahrheit (7 + 4 = 11) auch durch Zerlegen suchen und entwickeln, sprechend: 7 und 3 ist 10 und 1 ist 11. Dieses Verfahren ist ungleich schwieriger, komplizierter; es muß darum dem zweiten Schuljahre vorbehalten bleiben. Lautet ja doch unser Grundsatz: Zuerst das Leichtere, dann das Schwerere! Übrigens erhält das „Zerlegen beim Überzählen“ erst Wichtigkeit und Bedeutung in seiner Anwendung auf die höheren Zehner. Für die ersten zwei Dekaden ist es entbehrlich, da die Ergebnisse 7 + 4 = 11, 12 — 6 = 6 ꝛc. auch so gemerkt werden können. Wir werden also schon jetzt den Schülern das vollständige Einsundeins und Einsvoneins durch Zählen von Strichen u. dgl. finden und sodann tüchtig memorieren lassen, wir werden aber dabei, wie gesagt, vom Zerlegen beim Überschreiten des Zehners noch Umgang nehmen. Wie das Kind nach der bisherigen Methode sich einprägen mußte, daß 1 + 5 = 6, 2 + 5 = 7, 3 + 5 = 8, 4 + 5 = 9, 5 + 5 = 10 ist, so soll es nun auch die Ergebnisse 6 + 5 = 11, 7 + 5 = 12, 8 + 5 = 13 und 9 + 5 = 14 fix und fertig dazu lernen. Wir stellen damit keineswegs zu große Anforderungen an sein Gedächtnis. Die wenigen Resultate mehr werden leicht gemerkt und behalten, falls sie nur in regelrechte Reihen gebracht sind. Ich habe es in meiner eigenen Schule erfahren, welche geringe Mühe das Einlernen von solchen Reihen erfordert und mit welcher Lust und Liebe, mit welcher Frische und Freude dieselben, sobald sie einmal memoriert sind, von den Schülern aufgesagt und auswendig geschrieben werden.

Und nun zur Detaillisierung des Lehrstoffes, Lehrganges und Lehrverfahrens auf unserer Stufe!

Lehrstoff. — Man läßt den Schülern die Reihen des Einsundeins und später auch jene des Einswenigereins durch Gebrauch eines konkreten Zählmittels (Striche, Zählmaschine) suchen, man läßt

eine jede Reihe, sobald sie gefunden ist, tüchtig einprägen und läßt endlich einzelne Ergebnisse daraus auf die höheren Zehner anwenden und übertragen, doch beschränkt man sich dabei auf das Leichteste. Man fragt also den Schüler, nachdem er die Reihe „1 + 5 = 6, 2 + 5 = 7, 3 + 5 = 8 . . . . 9 + 5 = 14“ fließend aufgesagt hat, wie viel 21 + 5, 41 + 5, 61 + 5, 81 + 5 oder auch wie viel 3 + 5, 13 + 5, 33 + 5, 53 + 5 u. s. w. ist, aber nicht, wie viel 15 + 5, 36 + 5, 97 + 5, 48 + 5, 89 + 5 ꝛc. ꝛc. macht. Die Übungen im Vollmachen und Überschreiten der höheren Zehner sind für unsere Anfänger ein für allemal zu schwierig; sie müssen darum auf das zweite Schuljahr verspart werden.

Lehrgang. — Der Stoff ist zunächst auf zwei Hauptstufen zu verteilen nämlich

I. Hauptstufe: Die leichteren Übungen im Zuzählen oder Addieren und

II. Hauptstufe: Die leichteren Übungen im Abzählen oder Subtrahieren. Eine jede von beiden muß sodann in 9 bis 10 untergeordnete Stufen oder Übungen gegliedert werden, von welchen sich die erste mit dem Zu-, resp. Abzählen der 1, also vor allem mit der Reihe 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5 u. s. w. oder 1 — 1 = 0, 2 — 1 = 1, 3 — 1 = 2 ꝛc., die zweite mit dem Zu- resp. Abzählen der 2, die dritte mit jenem der 3 u. s. w., u. s. w., die zehnte und letzte endlich mit einer bunten Wiederholung aus den vorangegangenen neun Übungen zu befassen haben wird.

Lehrverfahren. — Die Reihen dürfen den Schülern nicht fix und fertig geboten, sie müssen vielmehr von ihnen erst gesucht werden und zwar durch Zählen von Strichen, welche sie auf ihren Schiefertafeln ziehen, oder auch an den Kugeln der Zählmaschine. Der Gebrauch der Finger zu diesem Zwecke ist nicht sonderlich zu empfehlen und zwar aus folgenden Gründen: Erstens können durch unsere Finger bloß die Zahlen von 1 bis 10 in greifbarer Wirklichkeit veranschaulicht werden, wir vermögen darum mittelst derselben nur sehr wenige Größenoperationen thatsächlich und sinnenfällig, d. h. nicht bloß gedanklich oder symbolisch auszuführen, also z. B. nur das Hinzufügen der 3 zu der 4, das Wegnehmen der 2 von der 7, das fortgesetzte Abzählen der 2 von der 8, das Verdoppeln der 5, nicht aber auch die Addition der 3 zur 9, die Subtraktion der 7 von der 12, das Vervierfachen der 6 u. s. w., u. s. w. Zweitens stellen sich unsere Anfänger beim Fingerzählen möglichst ungeschickt und unbeholfen an. Bis sie es darin zur Fertigkeit bringen, vergeht viel kostbare Zeit, welche durch andere nützlichere Dinge ungleich besser verwertet werden kann. Drittens und letztens wird die Resultatermittlung durch Finger immer unzuverlässig und unsicher bleiben, besonders wenn beide Hände in das Zählgeschäft verstrickt sind. Während der Schüler

mit der rechten Hand die Finger der linken aufstellt und richtet, bringt er jene der ersteren, welche er vielleicht längst schon parat gehalten hatte, wieder aus ihrer Lage. Mit einem Worte: Die Finger sind das denkbar schlechteste Veranschaulichungsmittel für den ersten Rechenunterricht. Sie dürfen darum nur ausnahmsweise und nur dann gebraucht werden, wenn eben nichts Geeigneteres zum Zählen vorhanden ist. Aber Steinchen u. dgl. finden sich ja allenthalben und dann stehen unserem Schüler jederzeit Griffel und Tafel zur Verfügung. Es ist daher meine Ansicht, daß man die Kinder mit dem Fingerzählen gar nicht quälen sollte. Freilich gerate ich dadurch in Widerspruch mit Meinungen, die ich in der 1. Abteilung dieses Buches entwickelt habe. Ich bin eben auf grund praktischer Erfahrungen von meiner damaligen Schwärmerei für das Fingerzählen seit kurzem gänzlich zurückgekommen. Kein billig Denkender wird mir darum diese Inkonsequenz, die ich hiemit selbst zugestehe, im Ernst verübeln. Wenn ich mich nun nicht wie die Mehrzahl der neueren Methodiker ausschließlich auf die Zählmaschine, obwohl dieselbe zur Auffindung und Veranschaulichung unserer Additions- und Subtraktionsergebnisse vollständig ausreichen würde, beschränke, so geschieht dies aus triftigen Gründen. Denn erstens müßte der ausschließliche Gebrauch der Zählmaschine, wie alles Einförmige und Monotone in den Kindern Langeweile und Überdruß erregen; dadurch aber, daß wir das Manipulieren mit Kugeln durch das Ziehen und Zählen von Strichen ablösen lassen, bringen wir Wechsel und dadurch Frische, Leben in den Unterrichtsgang, und zweitens hat das Operieren mit Strichen vor jenem an der Zählmaschine noch den eminenten Vorzug, daß es die *ganze* Klasse auch manuell beschäftigt, daß es den Trägsten, Schläfrigsten aus seinem Halbschlummer aufrüttelt und ihn zwingt, mitzuarbeiten. Doch, wie es verfehlt wäre, wenn man das ganze Einsundeins und Einsvoneins nur an der Zählmaschine entwickeln wollte, ebenso einseitig und verwerflich wäre es, wollte man bloß Strichezählen und nichts anderes treiben. Ich glaube, es wird am zweckmäßigsten sein, eine Arbeitsteilung eintreten zu lassen, so zwar, daß die Ermittlung der ersten vier oder fünf Additions- und Subtraktionsreihen dem Strichezählen, die der übrigen dagegen der Zählmaschine aufgebürdet wird.

I. Ausführliche Anleitungen in der Behandlung des Zuzählens oder Addierens.

Erste Übung: *Das Zuzählen der Eins.*

1. *Auffinden der Reihe durch den Schüler mittelst Strichezählen.* — Lehrer: „Legt alle die Schreibseite eurer Schiefertafeln auf! — Zeigt mir nun darauf die erste Zeile! — Die zweite! — die dritte! — Macht mir jetzt auf die erste Zeile einen

kurzen senkrechten Strich und sprecht dabei: 1! — Zeichnet zwei Finger breit davon weg noch einen zweiten Strich, aber ebenfalls auf die erste Zeile und sagt wiederum: 1! — Wir wollen nun zählen, wie viel es zusammen ist. Deutet also auf den ersten Strich: 1! auf den zweiten: 2! — 1 *und* 1 ist demnach wie viel? — Das sagt mir die erste Bank! — die dritte! — die fünfte! — die rechte Bankreihe! — die linke! Gut! Wir wollen das Ergebnis aufschreiben. Schreibt daher, genau wie ich es an der Wandtafel vormache, neben die gezeichneten Striche: $1 + 1 = 2$! — Macht mir jetzt auf die zweite Zeile zwei Striche und zählt dabei: 1, 2! — Macht zwei Finger breit davon weg noch einen Strich und sagt: 1! — Wir wollen nun erfahren, wie viel 2 *und* 1 zusammen ist. Deutet darum von einem Strich auf den anderen und zählt: 1, 2, 3! — 2 *und* 1 ist wie viel? — Das sagt mir A! — D! — G! — Das sagen mir nun alle zusammen! — Jetzt wollen wir es wieder schreiben. Schreibt also auf die zweite Zeile schnurgerade unter die anderen Ziffern: $2 + 1 = 3$!" u. s. w., u. s. w.

Die Schüler erhalten auf diese Weise folgende Zeichnung oder Darstellung auf ihrer Schiefertafel:

I	I	$1 + 1 = 2$
II	I	$2 + 1 = 3$
III	I	$3 + 1 = 4$
IIII	I	$4 + 1 = 5$
IIIII	I	$5 + 1 = 6$
IIIIII	I	$6 + 1 = 7$
IIIIIII	I	$7 + 1 = 8$
IIIIIIII	I	$8 + 1 = 9$
IIIIIIIII	I	$9 + 1 = 10$

2. *Memorieren der Reihe.* — Die Kinder nehmen nun in der nächsten Rechenstunde ihre gedruckten Tabellen zur Hand und beginnen mit dem Auswendiglernen der ersten Reihe, also des $1 + 1$, $2 + 1$ 2c. — Bei einer Klasse von 60 Schülern läßt man etwa dem 1. bis 15. die Sätzchen „$1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$" laut lesen, dem 16. bis 30. die Ergebnisse „$1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$", dem 31. bis 45. dasselbe, aber außerdem noch das Sätzchen „$4 + 1 = 5$", dem 46. bis 60. endlich das „$1 + 1$" bis zu dem Resultate „$5 + 1 = 6$". Außer dem Einzelnsprechen mag man dabei auch das Chorsprechen kultivieren, welches, nebenbei bemerkt, für den Massenunterricht die beste Manier des Auswendiglernens wäre, wenn es nur nicht, was aber bei fortgesetzter und ununterbrochener Verwendung des Chorsprechens kaum verhindert werden könnte, den Kindern bald zu monoton und langweilig werden, und eben darum in Geplär ausarten würde. Wenn wir uns zu unserem Zwecke gedruckter Tabellen bedienen, uns also nicht auf das bloße Vor- und Nachsprechen beschränken, so

geschieht dies, erstens weil das Memorieren rascher vor sich geht, wenn nicht nur dem Munde, sondern auch dem Auge etwas geboten wird und zweitens weil wir den Schülern, vor allem den schwächeren, Gelegenheit geben wollen, das Behandelte zu Hause noch besser einzuüben. Die Hauptarbeit des Auswendiglernens muß aber, wie ich ausdrücklich betone, in der Schule besorgt werden. Nach zwei halbstündigen Rechenlektionen, von welchen in der einen die ersten fünf Ergebnisse (also etwa $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, $4 + 1 = 5$, $5 + 1 = 6$) auf oben beschriebene Weise, in der anderen die letzten vier oder fünf ($6 + 1 = 7$, $7 + 1 = 8$, $8 + 1 = 9$, $9 + 1 = 10$) eingeübt werden können, ist eine Reihe meistens schon memoriert.

3. Abfragen und Aufsagen der Reihe. — Dem Einlernen oder Memorieren folgt naturgemäß das Abfragen und Aufsagen. Um jedoch während einer Lektion alle examinieren zu können, läßt man dem Einzelnen nur ein Stück der Reihe (etwa die Hälfte) hersagen oder läßt jedem nur einen einzigen Satz sprechen, z. B.: A „$1 + 1 = 2$“, C „$2 + 1 = 3$“, F „$3 + 1 = 4$“ u. s. w. — Soll man die Ergebnisse auch außer der Reihe abfragen? Ja, man muß es wenigstens versuchen. Einige werden es zusammenbringen. Erfolgt auf unsere Frage, z. B. wie viel 4 und 1 ist, entweder gar keine oder eine verfehlte Antwort, so läßt man das betreffende Ergebnis durch bloßes Aufsagen der Reihe finden. Der Lehrer befiehlt kurz: „Fang von vorne an!“ Und der Schüler beginnt: „$1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$“ ꝛc. — Nach dem Sätzchen „$4 + 1 = 5$“ wird er vom Lehrer durch ein energisches „Halt!“ und durch die Frage: „Wie viel ist also $4 + 1$?“ unterbrochen. — Sollte es dessenungeachtet nicht ganz nach Wunsch gehen, so darf man nicht unwillig werden. Nichts läßt sich vorzeitig erzwingen. Wir dürfen zufrieden sein, wenn sämtliche Schüler, vom ersten bis zum letzten, das Einsundeins in der Reihe aufzusagen vermögen. Außer der Reihe wird es später von selbst gehen. Es ist durchaus nicht notwendig, daß wir uns und unsere Kinder schon im ersten Schuljahre mit letzteren Übungen besonders abmühen.

4. Beweisenlassen einzelner Ergebnisse. — „Du sagst: $7 + 1 = 8$, zeige mir dies an der Wandtafel, indem du 7 Striche und 1 Strich mit Kreide zeichnest und von vorne durchzählst? — Wer kann mir an der Tafel vormachen, wie viel $5 + 1$ ist? — $9 + 1$?“ u. s. w.

5. Rechnerische Verwertung der Zählergebnisse. — Man läßt nun das Einsundeins auf die höheren Zehner anwenden, was durchaus keine besonderen Schwierigkeiten verursacht, dagegen die Fertigkeit steigert. Doch ist zu bemerken, daß nur solche Aufgaben berechnet werden dürfen, bei welchen der folgende Zehner weder erreicht

(vollgemacht), noch überschritten wird, also nur Aufgaben, welche sich innerhalb eines bestimmten Zehners bewegen, wie 38 + 1, 51 + 1, 87 + 1, 24 + 1 ꝛc., sodann daß es sich empfiehlt, mehrere gleichartige Fragen (18 + 1, 58 + 1, 78 + 1, 38 + 1 ꝛc.) unmittelbar nach einander zu stellen und endlich, daß wir dem Schüler die Lösung noch dadurch zu erleichtern haben, daß wir einer jeden rechnerischen Verwertung das betreffende Zählergebnis vorausschicken. Die Übungen erhalten dadurch diese Gestalt: 3 + 1, 23 + 1, 43 + 1, 83 + 1, 63 + 1; 7 + 1, 97 + 1, 17 + 1, 77 + 1, 37 + 1, 57 + 1; 4 + 1, 84 + 1, 14 + 1, 64 + 1, 34 + 1, 44 + 1 ꝛc.

6. Schriftliche Übungen. — Sobald die Reihe durch Strichezählen gefunden ist, läßt man sie von der gedruckten Tabelle abschreiben; nachdem sie memoriert wurde, muß sie auswendig, d. i. frei aus dem Gedächtnis geschrieben werden; schließlich kann man noch eine Reihe von Rechenbeispielen diktieren, z. B. „Schreibt auf eure Tafeln 2 + 1! — 32 + 1! (Zwischenfrage: Was kommt bei Dreißig immer voraus? — Antwort: Der 3. — Wie schreibt man demnach 32? — Antwort: Zuerst 3, dann 2.) 62 + 1! (Was kommt bei Sechzig immer voraus? — Antwort: Der 6. — Wie schreibt man also 62? — Antwort: Zuerst 6, dann 2.) — 92 + 1!" u. s. w.

Zweite Übung: Das Zuzählen der Zwei.

1. Auffindung der Reihe durch den Schüler mittelst Striche. — Lehrer: „Zeichnet mir in die erste Zeile eurer Tafel einen Strich, in die zweite zwei Striche, in dritte drei u. s. f., in die neunte endlich neun Striche! — Macht nun in jede Zeile noch zwei Striche und zwar ein paar Finger breit von den bereits gezeichneten entfernt! — Sagt mir nun, wie viele Striche habt ihr auf der ersten Zeile? — (1 + 2.) — Wie viel ist 1 + 2 zusammen? Zählt! — (1, 2, 3!) — Schreibt daher auf die erste Zeile in Ziffern: 1 + 2 = 3! Wie viel ist 2 + 2 zusammen? Zählt! — (1, 2, 3, 4!) — Schreibt: 2 + 2 = 4!" u. s. w. Schließlich bekommen die Kinder wieder nachstehende Zeichnung auf ihren Tafeln:

I	II	1 + 2 = 3
II	II	2 + 2 = 4
III	II	3 + 2 = 5
IIII	II	4 + 2 = 6
IIIII	II	5 + 2 = 7
IIIIII	II	6 + 2 = 8
IIIIIII	II	7 + 2 = 9
IIIIIIII	II	8 + 2 = 10
IIIIIIIII	II	9 + 2 = 11

2. Memorieren der Reihe. — Muß besonders sorgfältig gepflegt werden.

3. und 4. Abfragen, Aufsagen und Beweisenlassen der einzelnen Ergebnisse. Genau wie bei der ersten Übung.

5. Leichte rechnerische Anwendungen. Beispiele: 1 + 2, 51 + 2, 91 + 2; 2 + 2, 32 + 2, 82 + 2; 3 + 2, 73 + 2, 13 + 2; 4 + 2, 24 + 2, 54 + 2; 5 + 2, 65 + 2, 35 + 2; 6 + 2, 96 + 2, 76 + 2; 7 + 2, 47 + 2, 17 + 2. Aufgaben, welche ein Vollmachen des Zehners oder ein Überschreiten desselben erfordern, z. B. 48 + 2, 19 + 2 etc. sind wiederum grundsätzlich auszuschließen.

6. Schriftliche Übungen. a) Abschreiben der Reihe, b) Auswendigschreiben derselben, c) leichte Rechenaufgaben nach Diktando oder auch aus einer Aufgabensammlung, d) Schönschreiben der Ziffer 2.

Dritte bis fünfte Übung: Das Zuzählen der Drei, der Vier, der Fünf. — Lehrverfahren ähnlich wie bei der ersten und zweiten Übung.

Sechste Übung: Das Zuzählen der Sechs.

Auffinden der Reihe an der Zählmaschine. — Ein Schüler manipuliert mit den Kugeln der Zählmaschine; die übrigen schauen an, sprechen und schreiben die gefundenen Resultate auf ihre Tafeln. — Der Lehrer befiehlt: „Eins!“ und sogleich wird eine Kugel vorgeschoben, während der Chor „1!“ spricht. Darauf kommandiert der Lehrer: „und sechs!“. Der operierende Schüler holt unter lautem Zählen der ganzen Klasse eine Kugel nach der anderen vor, bis die verlangte Zahl erreicht ist. Nun wendet sich der Lehrer an einen Einzelnen mit der Frage: „Wie viele Kugeln wurden vorgeschoben?“ Schüler: „1 und 6.“ Dann kehrt er sich wieder zu der Masse: „Wie viel sind 1 und 6 zusammen? Zählt!“ Schüler: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7!“ Schließlich wird das Ergebnis „1 + 6 = 7“ von Einzelnen und im Chor mehrmals gesprochen und darauf vom Lehrer auf die Wandtafel, von den Schülern auf ihre Schiefertafeln geschrieben.

Auf diese Weise muß die ganze Reihe der Sechs bis zu dem Resultate „9 + 6 = 15“ entwickelt werden.

Mir ist es darum zu thun, von Zeit zu Zeit die ganze Schülermasse in Bewegung zu setzen. Ich wende darum, so weit es nur immer zulässig ist, das Chorsprechen an. Doch sehe ich streng darauf, daß Sprechen und thatsächliche Ausführung der Operation zusammentreffen, daß sie gleichzeitig stattfinden, daß vor allem der Chor nicht zu früh einfällt. Wenn z. B. „2!“ kommandiert wurde, so darf meine Klasse nicht eher „1!“ sagen, als bis die erste Kugel vorgeschoben und darf nicht eher „2!“ zählen, bis nicht auch die andere hervorgeholt ist. Das zwingt alle und jeden Einzelnen, die Vorgänge an der Zählmaschine mit gespannter Aufmerksamkeit zu verfolgen.

Memorieren, Aufsagen, Auswendigschreiben 2c., wie bei der 1. bis 5. Übung.

Die **siebente, achte und neunte Übung** endlich, welche das Addieren der Sieben, Acht und Neun zu behandeln haben, unterscheiden sich nicht wesentlich von der sechsten.

II. Ausführliche Anleitungen in der Behandlung des Abzählens oder Subtrahierens.

Erste Übung: Das Abzählen der Eins.

Auffinden der Reihe durch den Schüler mittelst Striche. — Lehrer: „Zeichnet auf die erste Zeile eurer Tafel einen Strich, auf die zweite zwei Striche, auf die dritte drei u. s. w., auf die zehnte Zeile zehn Striche! — Wie viele Striche sind auf der ersten Zeile? (Antwort: 1 Strich.) — Schreibt darum in Ziffer: 1! — Löscht nun den Strich mit dem Finger ab, indem ihr sprecht: weniger 1! — Wie viel habt ihr jetzt? — 1 weniger 1 ist demnach wie viel? — Schreibt mit Ziffern, genau wie ich es an der Wandtafel vormache: 1 — 1 = 0! — Wie viele Striche sind auf der zweiten Zeile? (Antwort: 2.) — Schreibt darum in Ziffer: 2! — Löscht nun von den zwei Strichen den letzten ab, indem ihr wieder sprechet: weniger 1! — Wie viel bleibt noch übrig? — 2 weniger 1 ist demnach wie viel? — Schreibt es mit Ziffern! — Auf der dritten Zeile sind wie viele Striche? (Antwort: 3.) — Schreibt also: 3! — Nehmt von den 3 Strichen den hinteren weg, indem ihr sagt: weniger 1! — Wie viel bleibt? Zählt! (Antwort: 1, 2!) — 3 weniger 1 ist? — Schreibt es!“ u. s. w., u. s. w.

Ist auf solche Weise die vollständige Reihe (1 — 1 = 0, 2 — 1 = 1, 3 — 1 = 2 . . . 10 — 1 = 9) entwickelt, so wird sie von der gedruckten Tabelle memoriert, dann auswendig hergesagt, aus dem Gedächtnis geschrieben und zuletzt zu leichten rechnerischen Übungen verwertet, z. B. 3 — 1, 43 — 1, 93 — 1; 5 — 1, 25 — 1, 85 — 1; 2 — 1, 12 — 1, 62 — 1; 9 — 1, 39 — 1, 79 — 1 u. s. w.; dagegen sind Aufgaben wie die folgenden: 20 — 1, 70 — 1, 40 — 1, 90 — 1 2c. grundsätzlich zu vermeiden.

Zweite Übung: Das Abzählen der Zwei.

Auffinden der Reihe durch Striche. — Lehrer: „Zeichnet auf die erste Zeile zwei Striche, auf die zweite drei, auf die dritte vier u. s. f., auf die zehnte elf Striche! — Schreibt nun neben jede Strichgruppe wie viel es sind! Also auf die oberste Zeile: 2, auf die nächste: 3, auf die dritte: 4 u. s. w.! — Gut! Wir wollen jetzt überall zwei Striche wegwischen und dann sehen, wie viel noch bleiben! Beginnen wir mit der ersten Zeile. Wischt einen Strich nach

dem anderen ab, indem ihr sprecht: 2 weniger 1, 2! — Was bleibt? — Schreibt in Ziffern: 2 — 2 = 0!" u. s. w., u. s. w.

Das Übrige ist bekannt.

Zu Rechenaufgaben dürfen bloß die ersten acht Ergebnisse (2 — 2 = 0 bis 9 — 2 = 7) verwendet werden. Der Lehrer kann also z. B. fragen: Wie viel ist 19 — 2, 59 — 2; 88 — 2, 38 — 2; 47 — 2, 97 — 2? rc., aber nicht: Was macht 20 — 2, 60 — 2; 81 — 2, 51 — 2, 31 — 2? rc.

Die **dritte bis neunte Übung** sind genau nach dem Musterbild der 1. und 2. zu behandeln. Zu bemerken ist nur, daß man die Reihen der Fünf, Sechs, Sieben, Acht und Neun ungleich rascher und bequemer an der Zählmaschine als an Strichen zu entwickeln vermag und daß darum der denkende Lehrer sich wohl ausschließlich der ersteren zu ihrer Auffindung bedienen wird.

Kurzer übersichtlicher Lehrplan für das erste Schuljahr, mit Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Monate.

A. Bloßes Zählen und Zifferschreiben.

1. Monat: Zählen von 1 bis 50. Einüben der Ziffern 1, 4, 7, 2, 3 und 5 (s. oben, 1. bis 24. Lektion).

2. Monat: Zählen bis 100. Einüben der Ziffern 1 bis 10 (s. oben, 25. bis 40. Lektion).

3. Monat: Schreiben und Lesen der Ziffern von 11 bis 100.

B. Die leichteren Übungen im Zuzählen oder Addieren.

4. Monat: 1. bis 3. Übung, also das Addieren der Eins, Zwei und Drei.

5. Monat: 4. bis 6. Übung, nämlich das Zuzählen der Vier, Fünf und Sechs.

6. Monat: 7. bis 9. Übung, das Zuzählen der Sieben, Acht und Neun. Wiederholung sämtlicher neun Additionsreihen.

C. Die leichteren Übungen im Abzählen oder Subtrahieren.

7. Monat: Das Abzählen der Eins, Zwei und Drei.

8. Monat: Das Subtrahieren der Vier, Fünf und Sechs.

9. Monat: Das Abziehen der Sieben, Acht und Neun. Wiederholung der neun Subtraktionsreihen.

10. Monat: Kursorische Repetition des Jahrespensums.

Das zweite Schuljahr.

A. Die schwierigeren Übungen im Addieren und Subtrahieren.

I. Additionsübungen mit Zerlegen beim Überschreiten des Zehners.

Vor allem ist den Kindern das Vollmachen und Ergänzen des Zehners zu lehren, sie müssen angeben können, wie viel zu 7, zu 5, zu 3 rc. gelegt werden muß, daß es 10 sind, sowie wie viel man zu 26 (56, 76, 96 rc.) hinzuzufügen hat, um 30 (60, 80, 100 rc.) zu erhalten. Dann müssen die Schüler im bloßen Zerlegen des Addenten geübt werden, und zwar müssen sie den Addenten in zwei Bestandteile zerlegen, nämlich in die Zahl, welche den Zehner vollmacht oder ergänzt und in den Rest, z. B. $9 + 7 = 9 + 1 + 6$, $69 + 7 = 69 + 1 + 6$, $54 + 9 = 54 + 6 + 3$ rc. Zuletzt erst darf man ihnen die Addition wirklich ausführen lassen. Wir bekommen sonach drei Übungen, die im Folgenden praktisch entwickelt werden sollen.

Erste Übung: Das Vollmachen und Ergänzen des Zehners. — Lehrer: „Komm an die Zählmaschine heraus und zähle rasch mit Zehn, indem du gleichzeitig immer zehn Kugeln auf einmal verschiebst, also 10, 20, 30 u. s. f. — Was folgt auf 20? — (Antwort: 30.) — Was auf 70? — (Antwort: 80.) — Sagt nun alle zusammen: Nach 10 kommt 20! Nach 20 kommt 30! Nach 30 kommt 40! u. s. f. bis 100. — Schiebe jetzt neun Kugeln vor und darauf noch eine und sage dann, wie viel es sind! — (Antwort: $9 + 1 = 10$.) — Wie viel ist $19 + 1$? — $29 + 1$? — $59 + 1$? — $99 + 1$? — $39 + 1$? — $79 + 1$? — Wie viel muß ich also zu 9 thun, damit es 10 werden? — Wie viel zu 19, auf daß ich 20 erhalte? — Antwortet nun im Chor auf meine Fragen: $9 + ? = 10$, $19 + ? = 20$, $29 + ? = 30$, $39 + ? = 40$! u. s. w. — Wer kann mir diese Fragen außer der Reihe beantworten? — Gut! Sage mir, wie viel ich zu 59, (39, 99, 79, 49) legen muß, um 60 (40, 100, 80, 50) zu bekommen?“

In der nächsten Lektion behandelt der Lehrer auf die eben beschriebene Weise das Ergänzen der 8, in der dritten jenes der 7, in der vierten das der 6 u. s. w. Nach der neunten oder zehnten Lektion werden dann alle seine Schüler von jeder beliebigen Zahl innerhalb des Raumes 1 bis 100 gewandt und sicher auf den nächsten Zehner zu ergänzen vermögen. Die Aufgaben, welche in dieser Übung gelöst werden müssen, sind natürlich zweierlei Art:

a) eigentliche Additionsaufgaben, z. B. $28 + 2$, $56 + 4$, $72 + 8$, $95 + 5$, $39 + 1$ rc.

b) Aufgaben im bloßen Ergänzen, z. B. 28 + ? = 30, 56 + ? = 60, 72 + ? = 80, 95 + ? = 100, 39 + ? = 40 ꝛc.

Die ersteren (also die eigentlichen Additionsaufgaben) hat man den letzteren (den Aufgaben im Ergänzen) immer vorauszuschicken.

Zweite Übung: Das Zerlegen des Addenten in die Zahl, welche den Zehner vollmacht und in den Rest.

1. Lektion. Das Addieren zur Neun. Lehrer: „Schiebe an der Zählmaschine 9 Kugeln vor und dann noch 2! — Auf der ersten Stange haben wir, wie ihr seht, 9 und 1, und auf der zweiten noch 1. 9 und 2 ist also 9 + 1 + 1. Wie wird man statt 19 + 2 (39 + 2, 59 + 2, 79 + 2, 49 + 2) sagen können? — Gut! Wir wollen jetzt zu 9 drei Kugeln hinzuthun. — Wie viel Kugeln haben wir auf der ersten Stange hinzugethan? (Antwort: 1.) — Wie viel auf der zweiten? (Antwort: 2.) — Statt 9 + 3 kann ich also auch sprechen? (Antwort: 9 + 1 + 2.) — Wie kannst du statt 29 + 3 (69 + 3, 89 + 3, 19 + 3, 59 + 3) sagen? — Schiebe nun zu 9 Kugeln vier hinzu! — Wie viel haben wir auf der ersten Stange zu 9 hinzugethan? (Antwort: 1.) — Wie viel auf der zweiten? (Antwort: 3.) — Statt 9 + 4 kann man darum auch sagen? (Antwort: 9 + 1 + 3.) — Wie könnt ihr statt 39 + 4 (79 + 4, 29 + 4, 59 + 4, 19 + 4) sprechen und schreiben?“ u. s. w., u. s. w.

2. Lektion: Das Addieren zur Acht. Lehrer: „8 Kugeln vor! — Dazu noch 3! — Wie viel kamen auf der ersten Stange zu den 8 Kugeln? (Antwort: 2.) — Wie viel auf der zweiten Stange? (Schüler: 1.) — Statt 8 + 3 kann man demnach sagen? (Antwort: 8 + 2 + 1.) — Wie könnt ihr nun statt 48 + 3 (28 + 3, 68 + 3, 88 + 3, 58 + 3) sprechen? — Schiebe zu den 8 Kugeln vier vor! — Wie viel hast du auf der ersten Stange hinzugethan? (Antwort: 2.) — Wie viel auf der zweiten? (Antwort: Ebenfalls 2.) — Statt 8 + 4 kann man also noch sagen? (Antwort: 8 + 2 + 2.) — Wie darum statt 18 + 4 (28 + 4, 38 + 4, 48 + 4 ꝛc.)?“ u. s. w. Schließlich mag der Lehrer die Sätzchen: 8 + 3 = 8 + 2 + 1; 8 + 4 = 8 + 2 + 2; 8 + 5 = 8 + 2 + 3; 8 + 6 = 8 + 2 + 4; 8 + 7 = 8 + 2 + 5; 8 + 8 = 8 + 2 + 6; 8 + 9 = 8 + 2 + 7; tüchtig memorieren lassen.

3. bis 8. Lektion. Das Addieren zur Sieben, Sechs, Fünf, Vier, Drei und Zwei. Genau nach dem Vorbild der ersten zwei Lektionen. Die wichtigeren Sätzchen muß man mit den Kindern sorgfältig einüben, also bei der 3. Lektion die Ergebnisse: 7 + 4 oder 7 + 3 + 1; 7 + 5 oder 7 + 3 + 2; 7 + 6 = 7 + 3 + 3; 7 + 7 = 7 + 3 + 4; 7 + 8 = 7 + 3 + 5; 7 + 9 = 7 + 3 + 6; bei der vierten die Resultate: 6 + 5 oder 6 + 4 + 1; 6 + 6 = 6 + 4 + 2 u. s. w., u. s. w.

Dritte Übung: Die thatsächliche Ausführung der Addition und zwar sowohl mit als ohne Zerlegen beim Überschreiten des Zehners. — Das in der zweiten Übung Behandelte wird nun nochmals vorgenommen, nur mit dem Unterschiede, daß man mit dem Zerlegen zugleich die thatsächliche Addition verbindet, daß man also sprechen läßt: 9 + 2; 9 + 1 = 10 + 1 = 11; 9 + 2 = 11! 9 + 3; 9 + 1 = 10 + 2 = 12; 9 + 3 = 12! 69 + 4; 69 + 1 = 70 + 3 = 73; 69 + 4 = 73! 29 + 7; 29 + 1 = 30 + 6 = 36; 29 + 7 = 36! u. s. w. — Wenn es die Schüler im Überschreiten des Zehners mittelst Zerlegen zu einiger Sicherheit gebracht haben, dann mag man ihnen die Ergebnisse auch rasch und ohne eigentliches Zerlegen angeben lassen. Das wird den Begabteren nicht schwer fallen, zumal wenn man zugleich die bereits im ersten Schuljahre gelernten neun Additionsreihen mit ihnen tüchtig wiederholt. Der Lehrer kann also etwa verlangen: „Sage mir die Additionsreihe der Drei!" Und der Schüler wird aufsagen: „1 + 3 = 4, 2 + 3 = 5, 3 + 3 = 6 . . . 9 + 3 = 12". Lehrer: „Sage mir schnell und ohne Besinnen: wie viel ist 9 + 3? Dann: wie viel ist 49 + 3? 79 + 3? 39 + 3?" Sollte eine verfehlte Antwort erfolgen, so müßte das Resultat selbstverständlich wieder durch Zerlegen gesucht werden. Das rasche Überzählen ist nur für die Fähigeren, doch kann man es zuweilen auch mit den Schwächeren probieren.

II. Subtraktionsübungen mit Zerlegen.

Erste Übung: Die Subtraktion vom vollen Zehner. — Vorübung: „Was kommt vor 100? (Antwort: Vor 100 kommt 90.) — Was vor 90? (Antwort: 80.) — Was vor 80? (Antwort: 70.)" u. s. f. — 1. Lektion: Die Subtraktion der Eins vom vollen Zehner. Lehrer: „10 — 1 = ?; 20 — 1, 30 — 1, 40 — 1" 2c. — 2. Lektion: Die Subtraktion der Zwei vom vollen Zehner. Lehrer: „10 — 2 = ?; 50 — 2, 70 — 2, 40 — 2, 80 — 2, 100 — 2" 2c. — 3. bis 9. Lektion: Die Subtraktion der Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht und Neun vom vollen Zehner.

Zweite Übung: Das Zerlegen des Subtrahenden in die Zahl, welche den Minuenden auf den vollen Zehner reduziert, und in den Rest. — 1. Lektion: Der Minuend ist 18, 28, 38 2c., der Subtrahend 9. — Lehrer: „Schiebe 18 Kugeln an der Zählmaschine vor! — Von diesen 18 Kugeln wollen wir 9 wegnehmen. Wie viel werden wir von der zweiten Stange wegnehmen müssen? (Antwort: 8.) — Und wie viel noch von der ersten? (Antwort: 1.) — Statt 18 — 9 kann ich darum auch sagen? (Antwort: 18 — 8 — 1.) — Wie kann man statt 28 — 9 sprechen? (Antwort: 28 — 8 — 1.) — Wie statt 38 — 9 (48 — 9, 58 — 9, 78 — 9)?" —

2. Lektion: Der Minuend ist 17, 27 ꝛc., der Subtrahend 8 und 9. Lehrer: „17 Kugeln vor! — Davon 8 weg! Wie viel wir Du zuerst wegthun? (Antwort: 7.) — Und dann? (Antwort: Noch 1.) — Statt 17 — 8 kann man daher auch sagen? (Antwort: 17 — 7 — 1.) — Wie statt 37 — 8 (57 — 8, 77 — 8, 97 — 8)? — Nimm jetzt von den 17 Kugeln 9 weg! Wie viel von der zweiten Stange? (Antwort: 7.) — Und von der ersten? (Antwort: Noch 2.) — Statt 17 — 9 könntet ihr darum auch sprechen? (Antwort: 17 — 7 — 2.) — Wie statt 27 — 9 (87 — 9, 67 — 9, 47 — 9)?" — 3. Lektion: Der Minuend beträgt 16, 26 ꝛc., der Subtrahend 7, 8 und 9. — 4. Lektion: Als Minuend steht 15, 25 ꝛc., als Subtrahend 6, 7, 8 und 9. — 5. Lektion: 14, 24 ꝛc. als Minuend, 5 bis 9 als Subtrahend. — 6. Lektion: 13, 23 ꝛc. als Minuend, 4 bis 9 als Subtrahend. — 7. Lektion: 12, 22 ꝛc. als Minuend, 3 bis 9 als Subtrahend. — 8. Lektion: 11, 21 ꝛc. als Minuend, 2 bis 9 als Subtrahend.

Dritte Übung: Die thatsächliche Ausführung der Subtraktion und zwar ebenfalls sowohl mit als ohne Zerlegen beim Herabsteigen unter den Zehner. — Die Aufgaben der zweiten Übung werden rekapituliert und zugleich berechnet, z. B. Wie viel ist 18 — 9? Antwort: 18 — 8 = 10 — 1 = 9. — Dann läßt man die neun Subtraktionsreihen, welche ja schon im ersten Schuljahr memoriert worden sind, tüchtig wiederholen und schließlich sucht man die Schüler wieder zur raschen, plötzlichen Lösung einzelner Aufgaben zu veranlassen.

B. Das Multiplizieren und Dividieren.

I. Die Übungen im mehrmaligen Zuzählen oder Multiplizieren.

Erste Übung: Das mehrmalige Zuzählen der Zwei. — Lehrer: „Macht auf euere Tafel zwei kurze senkrechte Striche und zählt dabei!" — Es geschieht. — Lehrer: „Wie oftmal 2 Striche habt ihr gemacht?" — Schüler: „Einmal 2." — Lehrer: „Einmal 2 ist demnach wie viel?" — Schüler: „Einmal 2 ist 2". — Lehrer: „Laßt nach den zwei Strichen eine daumen- oder auch zweifingerbreite Lücke, macht dann wieder ein Paar Striche und zählt dazu!" — Lehrer: „Wie oftmal 2 Striche habt ihr jetzt?" — Schüler: „Zweimal 2." — Lehrer: „Zweimal 2 ist wie viel? Zählt!" — Schüler: „1, 2, 3, 4! — Zweimal 2 ist 4." — Lehrer: „Zum drittenmal 2 Striche!" — Wird ausgeführt. — Lehrer: „Wie oftmal 2 habt ihr?" — Schüler: „Dreimal 2". — Lehrer: „Dreimal 2 ist wie viel? Zählt!" u. s. f. bis 10mal 2 ist 20.

Wenn man es für gut und praktisch hält, so kann man diese Reihe hernach auch an den Fingern suchen lassen und zwar etwa

auf folgende Weise: „Kinder, legt den Klein- und Ringfinger der linken Hand auf die Bank! An diesen beiden Fingern könnt ihr beliebig weit aufwärts zählen, indem ihr mit der rechten Hand zuerst auf den Kleinfinger, dann auf den Ringfinger, darauf wieder auf den Kleinfinger u. s. w. tupfet. – Zählt an den beiden Fingern bis 10! — Zählt nun auch bis 20! — Zählt noch einmal bis 20, aber sagt dabei immer, so oft ihr an den Ringfinger kommt, wie oftmal 2 es sind; also so: 1, 2 ist einmal 2; 3, 4 ist zweimal 2; 5, 6 ist dreimal 2 ꝛc. — Wenn jetzt einer von euch nicht wissen sollte, wie viel 6 mal 2 ist, so braucht er bloß an seinen zwei Fingern aufwärts zu zählen, bis er zu dem Ergebnis gelangt: 12 ist 6 mal 2“.

Dem Aufsuchen der Reihe durch den Schüler hat wiederum das wörtliche Auswendiglernen zu folgen. Das dritte und letzte aber sind leichte Preisberechnungen und zwar nur innerhalb des Umfanges unserer Reihe, also nur innerhalb des Zahlenraumes von 2 bis 20. Die Aufgaben könnten so lauten: „1 Griffel 2 ₰, ? 2 (4, 6, 8, 10) Griffel; 1 Bilderbuch 2 ℳ, ? 3 (5, 7, 9) Bilderbücher“.

Die zweite bis neunte Übung behandeln in ähnlicher Weise das Vervielfachen der 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10.

II. Die Übungen im fortgesetzten Abzählen (Enthaltensein.)

Der Begriff des „Enthaltenseins“ ist für den Anfänger zu abstrakt. Der sechs- bis achtjährige Schüler denkt nichts dabei, wenn er sagt: „3 ist in 12 viermal enthalten“. Verständlich ist ihm dagegen, wenn man ihn sprechen läßt: „3 kann ich von 12 viermal wegnehmen“ oder „3 von 12 geht 4 mal“. Die Vorstellung des fortgesetzten Subtrahierens ist ungemein anschaulich, sie leuchtet sofort ein. Wir werden darum für den Anfang wenigstens den Begriff des Enthaltenseins umgehen und dafür jenen des fortgesetzten Wegnehmens oder Subtrahierens substituieren.

Nun zur Beschreibung des Lehrverfahrens!

Erste Übung: Das fortgesetzte Abzählen der Zwei. — Lehrer: „Macht mir auf euere Tafel 2 Striche! — Löscht nun zuerst den hinteren Strich ab und dann auch den anderen, indem ihr sprecht: weniger 1, weniger 2! — Wie oftmal habt ihr nun 2 weggenommen? — Könnt ihr jetzt die 2 noch einmal wegnehmen? — 2 kann ich also von 2 nur wie oftmal wegnehmen? — Macht 4 Striche und sprecht dabei: weniger 1, weniger 2! — Nehmt nun auch zum zweitenmal 2 weg! — Könnt ihr noch zum drittenmal 2 wegnehmen? — 2 kann ich also von 4 wie oftmal nehmen?“ u. s. f.

Später mag der Lehrer auch erklären: „Statt: 2 kann ich von 2 einmal wegnehmen, 2 kann ich von 4 zweimal wegnehmen ꝛc. spricht

man kürzer: 2 von 2 geht 1 mal, 2 von 4 geht 2 mal ꝛc. oder auch, weil ich die 2 von der 4 nicht 2 mal wegnehmen könnte, wenn sie nicht schon zweimal darin stecken würde, 2 in 2 steckt 1 mal, 2 in 4 steckt 2 mal ꝛc. oder: 2 ist in 2 einmal enthalten, 2 ist in 4 zweimal enthalten ꝛc. oder endlich: 2 in 2 ist 1 mal, 2 in 4 ist 2 mal ꝛc."

Mittelst der Finger lassen sich diese Ergebnisse auf ähnliche Weise wie die Multiplikationsresultate finden. Man läßt den Schüler wiederum den Klein- und Ringfinger der linken Hand auflegen und daran aufwärts zählen. Wenn also zu ermitteln wäre, wie oftmal 2 in 10 steckt, so spricht der Schüler während des Zählens: „2 steckt in 1, 2 einmal; in 3, 4 zweimal; in 5, 6 dreimal" ꝛc.

Die gefundene Reihe muß schließlich wieder memoriert werden. — Zuletzt sind angewandte Aufgaben zu stellen, z. B. 1 Griffel kostet 2 ₰, wie viele Griffel bekomme ich nun um 4 (um 8, um 18, um 12) ₰? — Lösung: „Ich bekomme um 4 ₰ so oftmal 1 Griffel, als ich 2 ₰ von 4 ₰ wegnehmen kann. 2 kann ich von 4 zweimal wegnehmen, also" ꝛc.

Zweite bis neunte Übung: Das fortgesetzte Abzählen der 3 bis 10.

III. Die Übungen im verteilenden Zählen.

Erste Uebung: Das Verteilen auf zwei Teile. — Lehrer: „Legt mir die Schreibseite euerer Schiefertafel auf! Zeigt mir darauf die erste Zeile, die zweite, die dritte! ꝛc. Wir wollen nun auf die erste und zweite Zeile Striche zeichnen und zwar so, daß der erste Strich auf die erste Zeile, der zweite auf die zweite Zeile, der dritte wieder auf die erste Zeile u. s. w. kommt". Wenn das geübt ist, so sagt der Lehrer etwa: „Wir wollen jetzt 12 Striche auf zwei Teile verteilen; der eine Teil kommt auf die erste, der andere auf die zweite Zeile. Zeichnet nun die 12 Striche, indem ihr dabei laut zählt, und verteilt sie recht schön auf die zwei Zeilen! — Wie viele Teile habt ihr aus 12 gemacht? — Zeigt auf den ersten Teil! Zeigt auf den zweiten! — Wie groß ist der zweite Teil? Zählt! — Der zweite Teil von 12 ist also?" — Auf diese Weise läßt der Lehrer noch mehrere Verteilungen von Strichen vornehmen, und dann läßt er die Ergebnisse wieder in Reihen bringen, also etwa in folgende: „Der 2. Teil von 2 ist 1; der 2. Teil von 4 ist 2; der 2. Teil von 6 ist 3" ꝛc. und zuletzt läßt er sie auswendig lernen, was bei der großen Ähnlichkeit derselben mit den bereits memorierten Ergebnissen der fortgesetzten Subtraktion oder des Enthaltenseins nicht die geringste Schwierigkeit verursacht.

Den Schluß aber bilden leichte angewandte Aufgaben aus dem praktischen Leben, z. B. 2 m Tuch kosten 4 (8, 16, 10, 20) *M*, was

1 m? Lösung: 1 m kostet den 2. Teil von 4 *M.* oder 2 *M.* Es muß hier jedoch ausdrücklich bemerkt werden, daß bei derartigen Berechnungen die Bruchform vorläufig noch ganz zu vermeiden ist aus triftigen Gründen, welche im theoretischen Teile ausführlich entwickelt wurden, daß wir dem Schüler also nicht sagen lassen dürfen: 1 m kostet die Hälfte, sondern: 1 m kostet den zweiten Teil.

Man könnte nun fragen, weshalb ich die Multiplikations- und Divisionsergebnisse mittelst Striche und nicht an der Zählmaschine finden lasse. Und ich würde darauf antworten: Aus dem einfachen Grunde, weil sich das Vervielfachen, das fortgesetzte Subtrahieren und das Verteilen an unserer Zählmaschine nur schwer und auf zeitraubende und umständliche Weise, durch Striche dagegen ungemein leicht und rasch bewerkstelligen läßt. Man denke sich die beiden simplen Wahrheiten, daß 7 mal 3 = 21 ist, und daß 3 von 21 siebenmal genommen werden kann, zuerst an der Zählmaschine und darauf durch Abzählen und Gruppieren von Strichen ermittelt, und man wird nicht länger im Zweifel sein können, welches von unseren zwei Rechendingen (Zählmaschine, Striche) sich zur Einführung in das Mulipliziercn und Dividieren mehr empfiehlt.

Muß ein jedes Ergebnis des Einmaleins vom Schüler wirklich durch Zählen gefunden werden? Ist dies unbedingt notwendig? — Nein! Hauptsache bleibt, daß das Kind das Einmaleins versteht, daß es weiß, wie dasselbe durch Zählen ermittelt und begründet werden kann, und daß es im stande ist, jedes Einerresultat, sobald es verlangt wird, an den Fingern, Strichen oder Kugeln der Zählmaschine zu suchen und zu beweisen. Wenn man also beobachtet, daß die Schüler, sobald die Multiplikationsergebnisse der 7 an die Reihe kommen, dem Unterricht nicht mehr mit der bisherigen Freudigkeit und Frische folgen, daß sich ihrer über dem fortwährenden Stricheziehen vielmehr Langeweile und Überdruß bemächtigt, dann mag man sich damit begnügen, nur einige wenige Ergebnisse dieser Zahl, also etwa nur, daß $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$ und $9 \times 7 = 63$ ist, wirklich durch Zählen finden zu lassen und dafür sogleich zum Ablesen und Memorieren der betreffenden Tabelle aus dem Buche oder von der Wandtafel fortzuschreiten. Eine Übung so lange zu treiben, bis sie dem Kinde zum Ekel wird, und zwar nur deshalb zu treiben, um die Schablone, die man sich nun einmal einbildet, zu erfüllen, um dem Systeme, das man sich ausgeklügelt hat, gerecht zu werden, ist bloße, unverantwortliche, unverzeihliche Pedanterie, weiter nichts. Der Lehrer halte sich darum nie sklavisch an einen bestimmten Lehrgang und wenn er noch so gründlich durchdacht und noch so trefflich ausgearbeitet wäre. Eine Methode kann nur in allgemeinen Umrissen

und nur in abstrakten Sätzen angeben, was zu geschehen hat. Was aber in jedem einzelnen besonderen Falle am Platz, was für diese oder jene bestimmten Schülerindividualitäten angezeigt ist, darüber vermag sie keinen oder doch nur dürftigen Aufschluß zu erteilen; das hat der Lehrer selbst herauszufinden, das hat ihm sein angeborenes oder durch Beobachtung und Übung erworbenes pädagogisches Taktgefühl zu sagen. — Der Kindesnatur gerecht zu werden, das sei unser einziges Streben, unsere einzige Sorge. Das Interesse am Lehrgegenstand trete bei uns gegen die liebevolle Teilnahme, die wir für die Individualität des Schülers hegen, zurück. Nur der ist ein wahrer, ein echter Lehrer, ein Lehrer von Gottes Gnaden, dem das Kind höher steht, als der Unterrichtsgegenstand, den er an dasselbe bringt, und nur der wird wirklich Gutes und Vorzügliches erzielen, der die Wandlungen in der Stimmung seiner Schüler mit der größten Aufmerksamkeit verfolgt und ihnen Rechnung trägt. In der Schule muß Freude, muß Frische, muß Leben herrschen. Langeweile, Ermüdung, Abspannung, Schläfrigkeit darf darin gar nicht aufkommen, noch weniger sich festsetzen. Wie vermöchte man auch Anerkennenswertes bei Kindern zu leisten, welche nur mit halb offenen Sinnen und mit Unlust und innerem Widerstreben den Worten ihres Lehrers lauschen. — Wenn man daher, um wieder zu unserem eigentlichen Thema zurückzukehren, entdeckt, daß das unaufhörliche Zählen, das nicht endenwollende Manipulieren mit Kugeln und Strichen bei der Mehrzahl Widerwillen und Abneigung erzeugt, dann höre man damit einfach auf. Die Zeit, welche man noch an diese Übungen verwenden wollte, wäre doch verloren; sie kann, wenn man einen erfrischenden Wechsel im Lehrverfahren oder im Unterrichtsobjekt eintreten läßt, zum mindesten auf eine viel lohnendere Weise ausgenützt werden.

C. Die Uebungen an der Pestalozzi'schen Einheitstabelle zur vollständigen Beherrschung des Einmaleins.

Die Einheits- oder Einertabelle darf, wie ich bereits bei der Kritik der Pestalozzi'schen Methode erörtert habe, dem Schüler erst dann vor Augen gebracht werden, wenn er den Vorgang des Multiplizierens an einem beweglichen Zählmittel hat begreifen und die einzelnen Ergebnisse durch Abzählen von Strichen u. dgl. hat finden lernen, sie darf also erst gegen Ende des zweiten oder zu Anfang des dritten Schuljahres zur Anwendung kommen. Dann aber leistet sie in der That vortreffliche Dienste. Mit einem einzigen Blicke läßt sie dem Kinde das ganze Einmaleins überschauen. An der Einertabelle muß ihm notwendig das tiefere Verständnis desselben aufgehen, muß es den Zusammenhang entdecken oder wenigstens ahnen, der zwischen

dem Multiplizieren und Dividieren, sowie zwischen den beiden verschiedenen Arten des letzteren besteht, nämlich dem fortgesetzten Subtrahieren oder Enthaltensein und dem Verteilen; Vieles, was ihm seither noch undeutlich war, wird erst jetzt in ihm zur vollen Klarheit reifen. Die Einertabelle hilft einerseits bereits Erlerntes wiederholen und befestigen; sie führt insbesondere zu jener vollständigen, totalen Beherrschung des Einmaleins, welche zum Rechnen unbedingt erforderlich ist; andererseits leitet sie sogar eine neue Stufe der Erkenntnis ein. Die Uebungen an der Pestalozzi'schen Tabelle bilden die Grenzscheide, den Markstein zwischen zwei großen wichtigen Abschnitten unseres Lehrganges. Der eine von ihnen (Zählkurs) wird durch sie zum Abschluß gebracht und ein anderer, ein neuer (Rechenkurs) wird mit ihnen vorbereitet.

Hatten wir das Einmaleins bisher nur als Selbstzweck behandelt, so wird von jetzt an jene andere Betrachtungsweise in den Vordergrund treten, nach welcher dasselbe vornehmlich als Mittel des Rechnens erscheint, und hatten wir die einzelnen Ergebnisse seither ausschließlich in der modernen Form: $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$, $4 \times 2 = 8$ ꝛc. üben lassen, so werden wir nunmehr auch die alten, für das schriftliche Rechnen geeigneteren Reihen: $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$ ꝛc. entwickeln.

Die erste Übung an der Einertabelle wird in einem vorläufigen Orientieren bestehen müssen. Der Schüler lernt die 10 Horizontal- und die 10 Vertikalreihen der Tabelle unterscheiden und deren Inhalt angeben.

Dann mag man vielleicht übergehen

1. zu dem Ablesen der Multiplikationsresultate von den Horizontalreihen.

Erste Horizontalreihe: 1 mal 1 ist 1, 2 mal 1 ist 2, 3 mal 1 ist 3 ꝛc.

Zweite Horizontalreihe: 1 mal 2 ist 2, 2 mal 2 ist 4, 3 mal 2 ist 6 ꝛc.

Dritte Horizontalreihe: 1 mal 3 ist 3, 2 mal 3 ist 6, 3 mal 3 ist 9 ꝛc. u. s. f. u. s. f.

Darauf kann man behandeln:

2. Das Ablesen der Multiplikationsresultate von den Vertikalreihen.

Erste Vertikalreihe: 1 mal 1 ist 1, 1 mal 2 ist 2, 1 mal 3 ist 3 ꝛc.

Erste und zweite Vertikalreihe: 2 mal 1 ist 2, 2 mal 2 ist 4, 2 mal 3 ist 6 ꝛc.

Erste, zweite und dritte Vertikalreihe: 3 mal 1 ist 3, 3 mal 2 ist 6, 3 mal 3 ist 9 ꝛc. u. s. f. u. s. f.

Es läßt sich sonach die moderne Reihenbildung sowohl als auch die ältere an der Einertabelle verständlich machen und begründen.

Zur ersteren kommen wir, wenn wir die Strichgruppen der Horizontalreihen, zur letzteren dagegen, wenn wir jene der Vertikalreihen zur Zahl zusammenfassen.

3. Das Ablesen der Divisionsresultate von den Horizontalreihen (Division im Sinne der fortgesetzten Subtraktion oder auch in jenem des Enthaltenseins).

Die Quadrate der ersten Horizontalreihe umschließen 10 mal die 1, jene der zweiten 10mal die 2, die der dritten 10mal 3 u. s. f. Das Auffassen dieses Sachverhaltes führt zum Enthaltensein. Denke ich aber zugleich an ein Wegnehmen, Subtrahieren, so resultiert daraus die Division im Sinne der fortgesetzten Subtraktion, welche, obschon sie nur eine besondere Form des Enthaltenseins ist, den Kindern ungleich faßlicher und verständlicher scheint und welche darum (wenigstens im zweiten Schuljahre) den abstrakten Enthaltenseinsbegriff noch ausschließlich repräsentieren mag.

Erste Horizontalreihe: Die fortgesetzte Subtraktion der Eins, z. B. 1 kann ich von 1 einmal wegnehmen, 1 kann ich von 2 zweimal wegnehmen 2c. oder 1 von 1 geht 1 mal, 1 von 2 geht 2 mal, 1 von 3 geht 3 mal 2c.

Zweite Horizontalreihe: 2 von 2 geht 1 mal, 2 von 4 geht 2 mal, 2 von 6 geht 3 mal 2c.

Dritte Horizontalreihe: 3 von 3 geht 1 mal, 3 von 6 geht 2 mal, 3 von 9 geht 3 mal 2c. u. s. w. u. s. w.

Damit der Schüler den Zusammenhang, der zwischen der Multiplikation und der fortgesetzten Subtraktion (d. i. dem Enthaltensein) besteht, erkennen lernt, lassen wir ihm die Resultate dieser beiden Zählarten von unserer Tabelle unmittelbar nach einander ablesen, also zuerst irgend eine Multiplikationsreihe, z. B. 1 mal 3 ist 3, 2 mal 3 ist 6, 3 mal 3 ist 9 2c. und sogleich darauf die derselben entgegengesetzte Divisionsreihe: 3 von 3 geht 1 mal, 3 von 6 geht 2 mal 2c.

4. Das Ablesen der Divisionsresultate von den Vertikalreihen (Division im Sinne des Teilens oder richtiger des Verteilens).

Erste und zweite Vertikalreihe: das Verteilen auf zwei Teile. — Der Lehrer läßt sich zuerst die Multiplikationsergebnisse dieser beiden zusammengefaßten Reihen aufsagen, also: 2 mal 1 ist 2, 2 mal 2 ist 4, 2 mal 3 ist 6 2c. Darauf verlangt er: „Sage mir rasch, wie viele Striche in den obersten zwei Quadraten sind! (Antw.: 2.) — Wie viel sind in den folgenden zwei Vierecken? (Antw.: 4.) — In den dritten zwei Quadraten? (Antw.: 6.) — In den vierten zwei? (Antw.: 8!)“ u. s. f. Endlich stellt er die Fragen: „Auf wie viele Teile sind diese Zahlen, also die 2, 4, 6, 8 2c. in unserer Tabelle verteilt? (Antw.: Auf zwei Teile.) — Welches ist der erste und

welches der zweite Teil der 2? — Wo ist der erste und wo der zweite Teil der 4? — Wo der erste und wo der zweite Teil der 6? &c. — Wie groß ist der zweite Teil der 2? — der 4? — der 6? — Wer will mir diese Teile rasch von der Tabelle ablesen, wer will also sagen: der zweite Teil von 2 ist 1, von 4 ist 2, von 6 ist 3, von 8 ist 4 u. s. w.?"

Erste, zweite und dritte Vertikalreihe: Das Verteilen auf drei Teile. — Das Erste wird auch hier wieder das Ablesen der Multiplikationsergebnisse von diesen Reihen sein, nämlich der Resultate: 3 mal 1 ist 3, 3 mal 2 ist 6, 3 mal 3 ist 9 &c. — Das Zweite ist, daß der Lehrer bemerken und sprechen läßt: „Die Zahl 3 ist hier auf drei Teile verteilt; das ist der erste Teil der 3, das ist der zweite Teil und das der dritte Teil. Die Zahl 6 ist ebenfalls auf drei Teile verteilt; dies ist der erste, dies der zweite und dies der dritte Teil von 6. Die 9 ist wiederum in drei Teile geteilt" &c. Schließlich müssen die Schüler veranlaßt werden, die Größe der Teile und zwar bei einer jeden Zahl die des dritten oder letzten Teiles anzugeben, sowie die Divisionsreihe: der 3. Teil von 3 ist 1, der 3. Teil von 6 ist 2, der 3. Teil von 9 ist 3 &c. im Zusammenhang aufzusagen.

Erste, zweite, dritte und vierte Vertikalreihe: Das Verteilen auf vier Teile.

u. s. w. u. s. w.

5. Das rasche Zählen mit Zwei, Drei, Vier u. s. f. bis Zehn an den Horizontalreihen. Es ist dies nur eine verkürzte Form der Multiplikation.

Erste Horizontalreihe: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.
Zweite Horizontalreihe: 3, 6, 9, 12 . . . . . 30.
Dritte Horizontalreihe: 4, 8, 12, 16 . . . . . 40.

u. s. f. u. s. f.

6. Übungen in Kreuz und Quer. — Wir werden einen Schüler nach dem andern an die Einheitstabelle herausrufen, ihm irgend eine Reihe zum Absagen aufgeben und ihn dabei gleichzeitig auf die betreffenden Strichgruppen deuten lassen. Von dem ersten Schüler verlangen wir etwa: Sage mir das Einmaleins der neunten wagrechten Reihe! — Schüler: 1 mal 9 ist 9, 2 mal 9 ist 18, 3 mal 9 ist 27 &c. — Von einem anderen fordern wir: Sage das Einmaleins der ersten drei senkrechten Reihen! — Schüler: 3 mal 1 ist 3, 3 mal 2 ist 6, 3 mal 3 ist 9 &c. — Einem dritten geben wir auf: Zähle rasch mit Sechs! — Schüler: 6, 12, 18, 24 &c. — Ein vierter hat uns den zweiten Teil von 2, 4, 6 &c. anzugeben. — Ein fünfter endlich muß die Reihe aufsagen: 8 von 8 geht 1 mal, 8 von 16 geht 2 mal, 8 von 24 geht 3 mal &c.

Je bunter, desto besser!

Kurzer Lehrplan für das zweite Schuljahr.

1. Monat: Übungen im Vollmachen und Ergänzen des Zehners, sowie im Zerlegen des Addenten zum Zwecke des Überzählens.

2. Monat: Addieren und zwar sowohl mit als ohne Zerlegen beim Überschreiten des Zehners.

3. Monat: Übungen in der Subtraktion vom vollen Zehner, sowie im Zerlegen des Subtrahenden.

4. Monat: Subtrahieren und zwar ebenfalls sowohl mit als ohne Zerlegen beim Überschreiten des Zehners.

5. Monat: Das mehrmalige Zuzählen (Multiplizieren) der 2, 3, 4 und 5.

6. Monat: Das mehrmalige Zuzählen (Multiplizieren) der 6, 7, 8, 9 und 10.

7. Monat: Das fortgesetzte Abzählen (Enthaltensein).

8. Monat: Das Verteilen (Division im Sinne des Teilens).

9. Monat: Die Übungen an der Pestalozzischen Einheitstabelle.

10. Monat: Wiederholung des Jahrespensums.

Nachträgliche Bemerkung
zu den Additions- und Subtraktionsübungen des zweiten Schuljahres.

Man könnte sämtliche Additions- und Subtraktionsbeispiele, bei welchen der Zehner überschritten wird, von aller Anfang an ohne Zerlegen lösen lassen. Die Kinder brauchten nur die neun Additions- und Subtraktionsreihen, welche sie bereits im ersten Schuljahre memoriert haben, tüchtig zu wiederholen und dann die Ergebnisse: $9+2=11$, $9+3=12$ rc., $11-2=9$, $11-3=8$, $12-3=9$ rc. sofort auf die höheren Zehner zu übertragen. Es würde ihnen dies jedenfalls keine besonderen Schwierigkeiten verursachen, zumal, wenn die Aufgaben anfänglich so gestellt würden: $9+2=11$, $19+2=1$, $39+2=1$, $59+2=1$, $79+2+1$; $9+3=12$, $29+3=2$, $89+3=2$, $69+3=2$, $49+3=2$ rc., $11-2=9$, $21-2=9$, $91-2=9$, $31-2=9$, $71-2=9$ rc. rc.

Bei dieser Gelegenheit will ich ungescheut gestehen, daß ich für meine Person der eben angedeuteten Behandlungsweise, als der einfacheren, den Vorzug gebe, und daß ich mich nur auf vielseitige Vorstellungen meiner Freunde, sowie nach langem inneren Kampfe dazu entschließen konnte, die Additions- und Subtraktionsübungen für das zweite Schuljahr so auszuarbeiten, wie sie nun auf S. 143—146 dieses Buches vorliegen.

Das Zahlenzerlegen kann auch im zweiten Schuljahr vollständig entbehrt werden. Das ist meine feste Überzeugung.

II. Abschnitt.

Kurs des elementaren Rechnens oder die Neugestaltung des Rechenunterrichtes im 3., 4. und 5. Schuljahre.

Gegenstand: Die Rechenarten.

Ziel: Fertigkeit in der Ausführung der wichtigsten Rechenoperationen.

Stufengang:

1. Das Bilden und Zerlegen, Schreiben und Ablesen größerer Zahlen. — Einführung in das dekadische System.

2. Die Grundrechnungsarten, d. i. die Anwendung der Zählergebnisse des Einmaleins auf größere Zahlen (auf Zehner, Hunderter, Tausender 2c.).

3. Das Teilen, d. i. das Zertrennen, Zerschneiden eines Kontinuums oder einer Zahl in gleiche Stücke ohne Beziehung auf eine andere Größe. Diese Rechenart faßt noch folgende weitere Spezies unter sich:

a) das Verteilen in ungleiche Teile (Gesellschaftsrechnung),

b) das Abrunden der Teile (Durchschnittsrechnung), und

c) das Berechnen des mittleren Wertes einer Mischung oder Legierung (Alligationsrechnung).

4. Das Rechnen mit Teilen (Bruchrechnen). Dasselbe wird am besten gelehrt im unmittelbaren Anschluß an die Rechenart des Teilens und zwar noch vor der Gesellschafts-, Durchschnitts- und Mischungsrechnung.

5. Das Messen (Enthaltensein), d. i. das Zerlegen einer Größe nach dem Vorbild oder Maßstab einer anderen:

a) das Messen geradliniger Längen, Flächen und Körper (Raumrechnung),

b) das Ausmessen verbundener Zahlen durch die 100 oder 1000 (Prozent- oder Promillerechnung).

6. Die Verhältnisrechnung.

Verteilung des Stoffes auf die drei Schuljahre.

3. Schuljahr: Grundrechnungsarten.
4. Schuljahr: Teilen und Bruchrechnung.
5. Schuljahr: Raum-, Prozent- und Verhältnisrechnung.

Das dritte Schuljahr.

Übersicht.

1. **Semester.**

Gegenstand: Die Grundrechnungsarten von 1 bis zu den Tausenden.

Veranschaulichungsmittel: Rechentisch.

Ausschließliches Objekt der Berechnung: Münzen und zwar Pfennige, Zehnpfennig- und Markstücke, später Mark- und Zehnmarkstücke, Hunderter- und Tausenderbanknoten.

Lehrgang:

1. Stufe: Bilden, Lesen und Schreiben der Zahlen.
2. Stufe: Addieren.
3. Stufe: Subtrahieren.
4. Stufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator.
5. Stufe: Dividieren im Sinne des Enthaltenseins oder fortgesetzten Subtrahierens (mit einstelligem Divisor).
6. Stufe: Dividieren im Sinne des Teilens (ebenfalls mit einzifferigem Divisor).
7. Stufe: Wiederholung.

2. **Semester.**

Gegenstand: Die 4 Spezies im unbegrenzten Zahlenraum, Resolvieren und Reduzieren der mehrsortigen Größen (Zählmaße, Gewichte ꝛc.).

Veranschaulichungsmittel (unnötig).

Objekt der Berechnung: Die verschiedensten Dinge, vor allem Maße und Gewichte.

Lehrgang:

1. Stufe: Lesen und Schreiben der Zahlen bis zu den Millionen.
2. Stufe: Addieren der reinen, einfach und mehrfach benannten Zahlen.
3. Stufe: Subtrahieren.
4. Stufe: Multiplizieren mit ein- und mehrstelligem Multiplikator.
5. Stufe: Dividieren im Sinne des Enthaltenseins (mit ein- und mehrstelligem Divisor).
6. Stufe: Dividieren im Sinne des Teilens (mit ein- und mehrstelligem Divisor).
7. Stufe: Wiederholung an mehrfach benannten Zahlen und zwar besonders an Maßen und Gewichten mit nicht dezimaler Währung.

Erstes Semester.

1. Stufe: Bilden und Zerlegen größerer Zahlen. — Aufbau des Zehnersystems.

Der Lehrer zeigt seinen Schülern die leeren Fächer des Rechentisches und legt dann das Geld ein: „Seht Kinder, in das erste Fach meiner Schublade kommen die einzelnen Pfennigstücke oder die Einer; in das zweite Fach lege ich die Zehnpfennigstücke und Zehnpfennigrollen oder die Zehner, in das dritte Fach die Markstücke und die Hundertpfennigrollen oder die Hunderter, in das vierte endlich die Tausendersäckchen oder Tausender. Was ist im ersten Fach? — was im zweiten? — im dritten? — im vierten? — Zeige mir, in welcher Abteilung der Schublade die Einer, die Zehner, die Hunderter liegen? — Eine Zehnerrolle hat wie viele Pfennige? — Wie viele Pfennige enthält eine Hunderterrolle? — Komm' heraus, mache eine Zehnerrolle! Wie viele einzelne Pfennige mußt Du nehmen? Schiebe die zehn in diese leere Kapsel (Hülse, Rolle) schließe sie! — Wie viele Pfennige braucht man aber zu einer Hunderterrolle? — Wie viele Zehnerrollen kannst Du aus 30 (70, 50, 90, 20) ₰ machen? — 400 ₰ (800, 300, 900 ₰) geben wie viele Hunderterrollen? — Statt „Zehnerrollen" wollen wir künftig „Zehner", statt Hunderterrollen „Hunderter", statt Pfennige „Einer" sagen. — 300 Einer (200, 700, 500 Einer) geben wie viele Hunderter? — 80 (40, 60, 90 rc.) Einer sind wie viele Zehner?" u. s. f.

Lehrer: „Die Platte unseres Rechentisches ist, wie ihr seht, durch schmale Leisten in vier Felder geteilt. In diese Felder werden wir beim Rechnen das Geld legen und zwar in das erste Feld die einzelnen

Pfennige oder Einer, in das zweite die Zehnpfennige oder Zehner, in das dritte die Hundertpfennige oder Hunderter. Was kommt in das erste Feld? — was in das zweite? — in das dritte? — Zeigt mir, wohin ich die Einer legen werde! — die Zehner! — die Hunderter! — Ich habe 3 einzelne Pfennige in der Hand, in welches Feld der Rechenplatte werde ich sie thun? — Ich habe 2 Zehner (7 Hunderter ꝛc.), wohin werde ich sie legen?" u. s. f.

Lehrer: „Denkt euch, euere Schiefertafel wäre auch eine Rechenplatte. In wie viele Felder werdet ihr sie teilen müssen? — Gut! Sucht die Mitte der Tafel und zieht dann von oben bis unten einen senkrechten Strich! — Sucht die Mitte der rechtsliegenden Hälfte! Teilt sie! — Teilt auch die linksliegende Hälfte! — Was kommt in das rechtsliegende Feld? — Schreibt darum oben in dieses Feld: Einer! — Was kommt in das zweite Feld? — Schreibt: Zehner! — Was in das dritte? — Schreibt!" (Der Lehrer macht selbstverständlich dies alles an der Wandtafel vor.)

Lehrer: „Ihr habt nun eure Tafel zu einer kleinen Rechenplatte umgewandelt. Alles, was auf dem Rechentische geschieht, müßt ihr mir auf derselben nachzeichnen. Für Pfennige macht ihr mir Punkte oder Ringelchen, die Zehner- und Hunderterrollen deutet ihr durch kurze, dicke Striche an!"

Ein Schüler wird an den Rechentisch gerufen. Der Lehrer befiehlt: „Lege 2 Einer auf und zwar in das Einerfeld! 4 Zehner in das Zehnerfeld! 3 Hunderter in das Hunderterfeld!" Später drückt er sich so aus: „6 Einer! — 8 Zehner! — 1 Hunderter! — 4 Einer!" ꝛc. — Während der manipulierende Schüler das Geld auflegt, zeichnen die übrigen auf ihren Tafeln mit.

Schließlich müssen die Kinder noch im raschen und sicheren Umwandeln der Einer in Zehner oder Hunderter, der Zehner in Einer oder Hunderter, der Hunderter in Einer oder Zehner geübt werden. Dies macht sich an unserem Rechenapparat ungemein leicht, da derselbe, wie schon früher bemerkt wurde, die Zehner in zwei Formen vorführt, erstens in der Form von Einern, es ist dies die Zehnpfennigrolle, zweitens in jener von Zehnern, es ist dies das Zehnpfennigstück, und die Hunderter sogar in drei Formen zur Darstellung bringt, erstens in der Form der 100-Pfennigrolle (Einerform), zweitens in der der 10-Zehnpfennigrolle (Zehnerform), drittens in jener von Markstücken (Hunderterform). In der ersten Form erscheint die Hundert als Vielheit der Eins, in der zweiten als Vielheit der Zehn, in der letzten als wirkliche und ungeteilte Einheit. — Was nun das methodische Verfahren selbst betrifft, so mag der Lehrer zunächst eine 10-Pfennigrolle aus der Schublade herausgreifen und fragen: „Wie viele Pfennig sind das?" — Schüler: „10 Pfennig". — Darauf nimmt er etwa ein Zehnpfennigstück: „Was ist dies?" — Schüler: „Ein Zehnpfen-

nigstück". — Lehrer: „Wie viel gilt es?" — Schüler: „10 Pfennig". — Lehrer: „Was ist mehr, eine 10-Pfennigrolle oder ein Zehnpfennigstück?" — Schüler: „Beides ist gleich viel". — Lehrer: „Wenn ich verlange, lege einen Zehner auf, was kannst Du dann nehmen?" — Schüler: „Entweder eine 10-Pfennigrolle oder ein Zehnpfennigstück". — Lehrer: „Hier habe ich eine Hunderterrolle in der Hand. Wie viele Pfennig?" — Schüler: „100 Pfennig". — Lehrer: „Was für ein Geldstück habe ich aber hier?" — Schüler: „Eine Mark". — Lehrer: „Wie viel gilt eine Mark?" — Schüler: „100 Pfennig". — Lehrer: „Was ist mehr: eine Mark oder eine 100-Pfennigrolle?" — Schüler: „Beides ist gleich viel". — Lehrer: „Aus diesen 10 Zehnpfennigstücken hier mache ich eine Rolle; wie werde ich dieselbe nennen können?" — Schüler: „Eine 10-Zehnpfennigrolle". — Lehrer: Welchen Wert wird sie haben?" — Schüler: „100 Pfennig". — Lehrer: „Auf welche dreifach verschiedene Weise kann ich sonach 1 Mark oder 100 Pfennig bezahlen?" — Schüler: „Erstens durch eine 100-Pfennigrolle, zweitens durch eine 10-Zehnpfennigrolle, drittens durch ein Markstück". — Lehrer: „Wenn ich Dir anschaffe, Du sollst einen Hunderter auf die Rechenplatte legen, was kannst Du dazu nehmen?" u. s. f.

An diese anschauliche Entwickelung am Rechentisch lassen sich die Übungen

10 Einer = 1 Zehner	100 Einer = 1 Hunderter
20 " = 2 "	200 " = 2 "
30 " = 3 "	300 " = 3 "
40 " = 4 "	400 " = 4 "
u. s. f.	u. s. f.
1 Zehner = 10 Einer	10 Zehner = 1 Hunderter
2 " = 20 "	20 " = 2 "
3 " = 30 "	30 " = 3 "
4 " = 40 "	40 " = 4 "
u. s. f.	u. s. f.
1 Hunderter = 100 Einer	1 Hunderter = 10 Zehner
2 " = 200 "	2 " = 20 "
3 " = 300 "	3 " = 30 "
4 " = 400 "	4 " = 40 "
u. s. f.	u. s. f.

ohne weiteres anreihen.

So wird der Schüler in das klarste Verständnis der Dekadik eingeführt. Er lernt die Zahlen nach dem Zehnergesetz bilden, zerlegen, umwandeln. Zu diesen drei Bethätigungen hat nur noch das Lesen und Schreiben der Ziffern hinzuzukommen. Wie dieses letztere auf eine ungemein leichte und dabei rationelle Weise gelehrt werden kann, will ich im Folgenden erschöpfend darlegen.

Vom sogenannnten Stellenwert der Ziffern, zugleich eine völlig neue Anleitung im Schreiben und Lesen mehrstelliger Zahlen.

Das Schreiben drei- und mehrstelliger Zahlen wurde seither fast nur auf eine mechanische, oberflächliche Weise behandelt und eingepaukt. Man widmete ihm nicht die Sorgfalt, die ihm gebührt. Man ließ es insbesondere an der nötigen Veranschaulichung fehlen. Statt an Sachen (Geldstücken) zu entwickeln, daß es verschiedene Arten von Fünfen, Sechsen 2c. und darum auch verschiedene Arten von Ziffern, (nämlich Einerziffer, Zehnerziffer, Hunderterziffer 2c.) gibt, begann man sogleich mit der abstrakten Theorie vom Stellenwert der Ziffer, einer Theorie, die überdies das Zahlensystem in einem falschen, schiefen oder doch wenigstens einseitigen Lichte zeigt. Anstatt die Sache zum Ausgangspunkt zu nehmen, ging man hier vom Zeichen, von der Ziffer, vom Stellenwert derselben aus. Das war ein Fehler.

Sobald man die Sache in's Auge faßt, kann man unmöglich sagen, daß der Wert einer Ziffer lediglich von der Stelle, die sie zu anderen angewiesen erhalte, abhängig sei. Man kann dann aber auch nicht von einem Versetzen der Ziffern sprechen.

In dem Ausdruck „555" vertritt das mittlere Schriftzeichen eine ganz andere Sache als das letzte, und das vordere wieder ein anderes Quantum als das zweite und dritte. Die Ziffer an der mittleren Stelle ist kein Fünfer, sondern ein „Fünfziger"; die an der anderen Stelle ist weder ein Fünfer noch ein Fünfziger, sondern ein „Fünfhunderter". Jede der drei Ziffern ist streng genommen eine andere, welche mit den beiden übrigen nur die äußere Form gemein hat.

Habe ich mich nun daran gewöhnt, mit den Ziffern jederzeit bestimmte Quantitätsvorstellungen zu verbinden,*) bei der 5 also zu denken an 5 Einer, so kann ich die Ziffer, so lange ich diese bestimmte, sachliche Vorstellung damit verknüpfe, nicht versetzen. Aus 5 Einern werden, ich mag sie drehen und wenden wie ich will, ich mag sie in diese Stelle oder in jene schieben, nie und nimmer 5 Zehner oder 5 Hunderter.

Aus dem allen folgt:

1. Es gibt verschiedene Arten von Ziffern, verschiedene 5, verschiedene 6 u. s. f.

---

*) Dies scheint zum Teil in Widerspruch mit meinen früheren Behauptungen, nach welchen die Zahlen überhaupt nicht vorgestellt oder gedacht werden könnten, zu stehen. Ich muß darum ausdrücklich bemerken, daß ich nur die Möglichkeit der klaren, deutlichen Mengevorstellung geleugnet habe, daß es aber von mir keineswegs bestritten wurde, daß wir die Zahlen oberflächlich und beiläufig zu denken, also mit der 5 die Vorstellung des „Mehreren", mit 50 jene des „Vielen", mit 500 die des „sehr Vielen" zu verbinden vermögen.

2. Jede Art von Ziffern steht für ein bestimmtes, ihr allein eigentümliches Quantum. Die „Zehnerziffer 5“ deutet jederzeit nur 50, die „Hunderterziffer 5“ nur 500 an.

3. Die Ziffern lassen sich nicht willkürlich versetzen. Aus dem Versetzen derselben resultiert zum mindesten keine neue Sache. Ich mag die Einerziffer 5 hinschreiben wohin ich will, ich mag sie auf die 2te, 3te, 4te, xte Stelle rücken, ich werde, so lange ich mit der Einerziffer die ihr entsprechende Vorstellung, nämlich die Vorstellung der 5 Einheiten oder Einsen verbinde, doch nie die 50, die 500 erhalten. Ich müßte eben gleichzeitig mit dem Versetzen der Ziffer die bisherige Vorstellung (5 Einheiten) aufgeben und dafür jene der beiden anderen (5 Zehner = 50 und 5 Hunderter = 500) eintauschen, aber dann hätte ich es, da nun die 5 für etwas ganz anderes als seither (nämlich für 5 Zehner oder Hunderter) gebraucht wird, auch mit einer völlig neuen Ziffer (Zehnerziffer, Hunderterziffer) zu thun, die nur äußerlich der Einerziffer gleicht.

Es mag sein, daß die feinen Unterscheidungen, die ich hier mache, auf logische Haarspaltereien und bloße Spitzfindigkeiten hinauslaufen; ich selbst kann dies natürlich nicht beurteilen. Aber das Eine weiß ich gewiß, daß diese scheinbaren Subtilitäten mich in den Stand setzen, den Schüler auf eine viel einfachere, verständlichere, rationellere Weise zum Lesen und Schreiben mehrstelliger Zahlen anzuleiten, als dies seither geschehen ist. — Nun zur Beschreibung meines Verfahrens!

Die erste Thatsache, welche man dem Schüler zum Bewußtsein zu bringen hat, ist, daß verschiedene Fünf, verschiedene Sechs, Sieben u. s. f. unterschieden werden müssen. Der Lehrer legt darum auf der Rechenplatte 5 Markstücke, 5 Zehnpfennigstücke und 5 einzelne Pfennige auf und fragt, auf die Markstücke zeigend: „Wie viele Geldstücke sind das?“ — Schüler: „5.“ — Lehrer auf die Zehnpfennige weisend: „Wie viel dies?“ — Schüler: „5.“ — Lehrer auf die Pfennige deutend: „Und dies?“ — Schüler: „Ebenfalls 5.“ — Lehrer: „Wie viele Fünfer liegen auf dem Tisch?“ — Schüler: „Drei Fünfer.“ — Lehrer: „Gilt hier der erste Fünfer ebensoviel wie der zweite und dritte? — Sind also die drei Fünfer einander gleich? — Was gilt der erste Fünfer? — was der zweite? — der dritte? — Gut, ich will die drei Zahlen anschreiben.“ — Der Lehrer setzt nun die Ziffern senkrecht unter einander, also so: 5
5
5

und fragt dann: „Habe ich recht geschrieben? — Warum nicht?“ — Schüler: „Es sind drei verschiedene Fünfer. Wenn man aber die Ziffern untereinander schreibt, so muß man glauben, es wäre nur eine Art von Fünfern, es wären nur Einer und die obere Ziffer gelte genau so viel, wie die mittlere und die untere.“ — Lehrer: „Für

welche Sache soll die obere Fünf stehen?“ — Schüler: „Für 5 Hunderter oder 500.“ — Lehrer: „Was soll die mittlere Ziffer andeuten?“ — Schüler: „5 Zehner oder 50.“ — Lehrer: „Und was die untere?“ — Schüler: „5 Einer.“ — Lehrer: „Weil wir es hier mit drei verschiedenen Ziffern zu thun haben, so wollen wir ihnen auch besondere Namen geben. Die obere Ziffer steht für 5 Hunderter, sie soll darum „Hunderterziffer“ heißen. Wie werde ich nun die mittlere Ziffer benennen? — Und wie die untere? — Was gilt die Hunderterziffer 5? — Was die 5 als Zehnerziffer? — Was als Einerziffer? — Sieht man es aber der oberen 5 an, daß es eine Hunderterziffer ist? — der mittleren 5, daß sie 5 Zehner anzeigen soll?“

Bei diesem Punkte angelangt, wird der Schüler mit einer zweiten wichtigen Thatsache vertraut gemacht, mit der Thatsache nämlich, daß die Zehnerziffern, Hunderterziffern ꝛc. erst aus den begleitenden Ziffern kenntlich werden, daß die wertvollste Ziffer jederzeit an der Spitze steht, d. i. links vor den anderen, sowie daß die nachfolgenden Ziffern eine doppelte Funktion zu erfüllen haben, daß sie erstens den Wert der an der Spitze stehenden Ziffer vervollständigen und zweitens auch ihren eigenen Wert zur Geltung bringen müssen. Aber, könnte man fragen, übersteigen diese schwierigen Beziehungen nicht die Fassungskraft unserer Schüler? — Nach meiner Überzeugung: nicht im geringsten. Der Lehrer muß eben die Sache nur möglichst anschaulich darstellen, er muß sich nur des Gleichnisses, des Bildes bedienen, dann wird er ganz sicher von allen verstanden werden. Wie er etwa dabei verfahren könnte, soll nachfolgende Lehrprobe zeigen.

Lehrer: „Einem vornehmen Herrn kann man, so lange er in gewöhnlicher Kleidung und ohne Dienerschaft einherschreitet, seine Stellung unmöglich ansehen, eben so wenig kann man einer Zehner-, Hunderter- oder Tausenderziffer ihren Wert anmerken, so lange sie allein steht. Wie große Herren nie ohne Dienerschaft sind, so sind auch die Zehner-, Hunderter-, Tausenderziffern nie ohne begleitende Ziffern. Die Größe des Gefolges richtet sich nach dem Grade der Vornehmheit und Macht des betreffenden Herren; ein Fürst hat eine zahlreichere Dienerschaft, als ein Baron oder Graf, und ein Regent (König, Kaiser) wiederum eine größere als ein Fürst. Ebenso ist auch die Anzahl der begleitenden Ziffern von dem Grade der Vornehmheit der an der Spitze stehenden Ziffer abhängig. Die Zehnerziffer hat nur einen Begleiter, die Hunderterziffer hat deren zwei, die Tausenderziffer drei u. s. f. Ein Blick auf die Anzahl der begleitenden Ziffern sagt mir, ob ich eine Zehner-, Hunderter- oder Tausenderziffer vor mir habe, ob die 5 an der Spitze 50 oder 500 oder 5000 gelten soll. — Im Gefolge eines vornehmen Herren sind entweder nur Diener (Lakaien), d. i. solche, die von ihrer Herrschaft vollständig abhängig sind und für sich keine Macht, kein Ansehen, kein Vermögen haben, oder es sind auch Männer

darunter, welche ebenfalls irgend ein Vermögen, eine Macht besitzen, ja vielleicht selbst einen oder mehrere Diener mit sich führen und nur im Vergleich zu ihrem Oberherren (Fürsten, Regenten) als minderwertig, mindervornehm erscheinen. So setzt sich auch das Gefolge der Zehner-, Hunderter-, Tausenderziffern entweder nur aus Dienern, aus Nullen zusammen oder wiederum aus Herren, d. i. aus anderen Ziffern, die aber minder mächtig sind. Endlich, wie große Herren jederzeit den Vortritt haben und alle weniger vornehmen, reichen, mächtigen bescheiden hinterdrein gehen, so steht auch in der Zifferschrift die wertvollste Ziffer immer an der Spitze, ihr folgt sodann jene, welche nach ihr die vornehmste ist und ganz am Ende erst kommt die Einerziffer, dem gewöhnlichen Menschen vergleichbar, der auch niemand zu seiner Bedienung bei sich hat und darum alles selbst besorgen muß. — Woran kann man also die Einerziffer leicht erkennen?" — Schüler: „Daran, daß sie allein steht." — Lehrer: „Wenn ich 5 an die Tafel schreibe und sonst nichts, was zeigt diese Ziffer dann an?" — Schüler: „5 Einer." — Lehrer: „Woran erkennt man die Hunderter-, die Tausenderziffer?" — Schüler: „An der Anzahl der begleitenden Ziffern." — Lehrer: „Wie viele Begleiter hat die Zehnerziffer? — wie viele die Hunderterziffer? — die Tausenderziffer? — Wo steht stets die wertvollste Ziffer? — Wo die Einerziffer? — Wenn hinter der 3 eine 0 folgt, wie wirst du diese Ziffer lesen? wie die ganze Zahl? — Wenn nun hinter der 3 eine 2 steht, wie sprichst du dann die vordere Ziffer aus? wie die hintere? wie beide zusammen? — Wenn nach der 6 zwei Nullen kommen, wie heißt dann diese Zahl? Wie wird die 6 gesprochen, wenn sie 0 und 3 (7 und 2, 5 und 0, 4 und 8, 1 und 9 ꝛc.) hinter sich hat?"

Nach diesen Vorfragen und erläuternden Bemerkungen kann der Lehrer sogleich zum Schreiben und Lesen unserer mehrstelligen Zahlen übergehen. Auf das Zehnerfeld der Rechenplatte legt er 5 Zehnpfennigstücke und fragt: „Wie viel Zehner sind das?" — Schüler: „5." — Lehrer: „Schreibt 5! — Wie werden die Zehner kenntlich gemacht?" — Schüler: „Durch eine begleitende Ziffer." — Lehrer: „Sind außer den 5 Zehnern auch Einer vorhanden?" — Der Schüler blickt auf das leere Einerfeld der Rechenplatte und spricht: „Nein." — Lehrer: „Welche Ziffer werdet ihr darum hinter die 5 setzen?" — Schüler: „0." — Lehrer: „Die Null deutet hier ein Zweifaches an: 1) läßt sie erkennen, daß die 5 „Zehner" sind, 2) sagt sie uns, daß die Einer fehlen. Wir können darum beim Anschreiben der Fünfzig sprechen: 5 Zehner, 0 Einer." — Der Lehrer legt dann der Reihe nach 3, 6, 8, 4 ꝛc. Zehner auf, läßt die Zahlen schreiben und dabei sagen: „30 sind 3 Zehner, 0 Einer! 60 sind 6 Zehner, 0 Einer!" u. s. f. Dann stellt er die Frage: „Was deutet die Null hinter der 5, der 3, der 6 ꝛc. an?" und erhält darauf zur Antwort: „Die Null

zeigt ein Zweifaches an; sie sagt uns: erstens, daß die vorausgehende Ziffer eine Zehnerziffer ist, zweitens, daß keine Einer vorhanden sind."

Der Lehrer legt auf der Rechenplatte 5 Markstücke oder 5 Hunderterrollen auf: „Wie viel Hunderter?" — Schüler: „5." — Lehrer: „Schreibt 5! — Wie werden die Hunderter kenntlich gemacht?" — Schüler: „Durch zwei begleitende Ziffern." — Lehrer: „Liegen außer den Hundertern auch Zehner auf der Rechenplatte?" — Schüler: „Nein." — Lehrer: „Schreibt also 0! — Sind Einer gegeben?" — Schüler: „Nein". — Lehrer: „Schreibt eine zweite 0! — Was deuten die zwei Nullen hinter der 5 an?" — Schüler: „Daß diese Ziffer eine Hunderterziffer ist." — Lehrer: „Was drückt die erste Null außerdem noch aus?" — Schüler: „Daß keine Zehner vorhanden sind." — Lehrer: „Was die zweite Null?" — Schüler: „Daß keine Einer da sind." — Lehrer: „Wie kann man daher beim Anschreiben der 500 sprechen?" — Schüler: „5 H., 0 Z., 0 E.!" — Der Lehrer legt dann noch verschiedene Hunderter auf, läßt dieselben vom Schüler in Ziffern niederschreiben und dabei sprechen: „600 sind 6 H., 0 Z., 0 E.! 900 sind 9 H., 0 Z., 0 E.!" u. s. f.

Nun ist unser Schüler so weit, daß man ihm unbedenklich das ganze Geheimnis unseres „Positionsgesetzes" aufdecken kann, jenes merkwürdigen Gesetzes, das den berühmten Laplace zu den Worten hinriß: „Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellenwert gibt, ist so einfach, daß man eben deswegen nicht genug anerkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem Rechnen gewährt, erheben das arithmetische System der Inder in den Rang der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es aber war eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus entnehmen, daß sie dem Genie des Archimedes und des Apollonius von Perga, zwei der größten Geister des Altertums, entgangen war." — Diese Worte lassen deutlich erkennen, daß das Positionsgesetz, nämlich das Gesetz vom Stellenwert der Ziffern, selbst nach der Ansicht unseres großen Mathematikers zu dem Scharfsinnigsten und Subtilsten gehört, was der Menschengeist je erfunden hat. Was folgt aber daraus für den Unterricht? Antwort: Dies, daß man mit unserem Gesetze nicht, wie es seither geschehen ist, beginnen darf, daß sich dasselbe vielmehr (etwa nach dem Musterbild der vorstehenden Lehrproben) als das letzte Resultat der sorgfältigsten Entwicklung ergeben muß. — Aber noch in anderen Beziehungen weicht mein Unterrichtsverfahren von dem bisherigen wesentlich ab. So spreche ich z. B. nie von einem Versetzen der Ziffern, ich sage also nie: wenn die 6 auf die zweite Stelle versetzt wird, so gilt sie 60, wenn sie auf die dritte gerückt wird, 600 u. s. f. Ich drücke mich vielmehr so aus: Auf der ersten Stelle stehen die Einerziffern, auf

der zweiten die Zehnerziffern, auf der dritten die Hunderterziffern. Dann: Die Ziffern auf der zweiten Stelle haben den zehnfachen Wert von jener auf der ersten, denn sie stehen für Zehner; die Ziffern auf der dritten Stelle haben den hundertfachen Wert, denn sie stehen für Hunderter u. s. f. — Endlich dulde ich es nie, daß der Schüler auf die Frage, weshalb in dem Ausdruck 365 die erste Ziffer dreihundert gilt, zur Antwort gibt: „Weil die 3 auf der Hunderterstelle sich befindet.“ Die Antwort, die ich hier allein zulasse, lautet: „Diese 3 gilt 300, weil es eine Hunderterziffer ist“ oder „weil sie für Hunderter gebraucht wird“, „weil sie Hunderter bezeichnet.“ Denn nicht die Stellenanweisung ist hier die Ursache des Wertes (nämlich, daß die 3 dreihundert gilt), sondern umgekehrt die Sache, der Wert, welcher durch unsere Ziffer angedeutet werden soll, war die Veranlassung, daß man der letzteren die dritte Stelle einräumte; und unsere 3 ist nicht deshalb 300 wert, weil sie zufällig auf der dritten Stelle steht, sondern sie steht vielmehr auf der dritten Stelle, weil sie Hunderter vertritt.

Das im Allgemeinen! Und nun noch eine speziellere Anleitung, wie man den Kindern die Stellengebung der Ziffern, also die dritte Thatsache in unserer stufenmäßig fortschreitenden methodischen Entwicklung zu verdeutlichen vermag.

Zunächst wird eine Reihe von mehrstelligen Zahlen auf dem Rechentisch in Geldstücken aufgelegt und dann vom Lehrer an die Wandtafel, von den Schülern auf ihre Schiefertafeln oder in ihre Hefte senkrecht unter einander geschrieben. Darauf werden die notierten Zahlen betrachtet und besprochen. Wir wollen annehmen, es stünden auf der Tafel:

327
436
512
948.

Der Lehrer deutet auf die Einer (7, 6, 2, 8), hernach auf die Zehner (2, 3, 1, 4), zuletzt auf die Hunderter (3, 4, 5, 9) und fragt, was jede dieser Ziffern wert ist. Dann: „Auf welcher Seite stehen die Einerziffern, auf der rechten oder auf der linken?“ — Schüler: „Auf der rechten Seite.“ — Lehrer: „Stehen die Zehnerziffern vor oder hinter den Einern?“ — Schüler: „Links vor den Einern.“ — Lehrer: „Wo die Hunderterziffern?“ — Schüler: „Links vor den Zehnern.“ — Lehrer: „Die Stelle, an welcher die Einer stehen, wollen wir die erste Stelle nennen, die Stelle, an welcher sich die Zehner befinden, die zweite, die, an welcher die Hunderter geschrieben sind, die dritte Stelle. Zeigt mir die erste Stelle! — die zweite! — die dritte! — Nennt mir die Ziffern der ersten Stelle von unserer Tafel!

— Leset die der zweiten Stelle! — jene der dritten! — Welche Art von Ziffern steht auf der ersten Stelle? — auf der zweiten? — auf der dritten? — Weil auf der ersten Stelle die Einer stehen, so kann ich diese Stelle auch Einerstelle heißen. Welchen Namen werde ich nun der zweiten Stelle geben? — und welchen der dritten? — Zeigt die Einer-, die Zehner-, die Hunderterstelle! — Leset die Ziffern der Einerstelle!" 2c. — Dann deutet der Lehrer etwa auf die 7 Einer und fragt: „Was gilt diese Ziffer?" — Schüler: „7!" — Lehrer: „Woran kennst du, daß diese Ziffer nur 7 gilt?" — Schüler: „Weil sie in der Einerstelle steht und darum auch nur Einer anzeigen kann." — Lehrer (auf die 2 Zehner weisend): „Was gilt diese Ziffer?" — Schüler: „20!" — Lehrer: „Warum 20 und nicht 2?" — Schüler: „Weil sie an der Zehnerstelle steht und darum auch nur Zehner vorstellen kann." — Lehrer: „Den wievielfachen Wert der Einerziffer hat die Zehnerziffer?" — Schüler: „Den zehnfachen; denn 2 Einer = 2; 2 Zehner = 20." — Lehrer (auf die 3 Hunderter deutend): „Und was gilt jene Ziffer?" — Schüler: „300!" — Lehrer: „Weshalb 300 und nicht 3?" — Schüler: „Weil es eine Hunderterziffer ist, denn sie steht auf der dritten Stelle." — Lehrer: „Das wievielfache der Einerziffer gilt die Hunderterziffer?" — Schüler: „Das Hundertfache. 3 Einer = 3; 3 Hunderter = 300." — Lehrer: „Den wievielfachen Wert der Zehnerziffer besitzt die Hunderterziffer?" — Schüler: „Den zehnfachen der Zehnerziffer. 3 Zehner = 30; 3 Hunderter = 300." — Auf ganz dieselbe Weise werden auch die übrigen Zahlen besprochen. Der Schüler erhält dadurch die abstrakte Regel: „Die Zehnerziffern haben den zehnfachen Wert der Einerziffern; die Hunderterziffern haben den hundertfachen Wert der Einer- und den zehnfachen Wert der Zehnerziffern" oder auch: „Die Ziffer der zweiten Stelle gelten zehnmal so viel wie jene der ersten; die Ziffer der dritten gelten hundertmal so viel wie jene der ersten und zehnmal so viel wie die der dritten Stelle."

Zum Schlusse ein kurzes Wort über die größere Ausdehnung, welche ich den Übungen im Bilden, Zerlegen, Schreiben und Lesen der Zehner, Hunderter und Tausender geben möchte. Diese wichtigen Operationen sind in unseren herkömmlichen Rechenbüchern und Aufgabensammlungen gewöhnlich in eine einzige Übung zusammengedrängt, welche noch dazu „Vorübung für das Rechnen mit den vier Spezies" überschrieben ist und sich somit bereits durch den Titel als etwas Nebensächliches, Untergeordnetes ankündigt. In meinem Lehrgange hingegen nimmt das Aufbauen und Schreiben größerer Zahlen eine hervorragende Stelle ein, es gibt den Gegenstand für eine eigene besondere Stufe ab, die sich wiederum in eine Reihe von Übungen gliedert. Man hat das Lesen und Anschreiben mehrstelliger Zahlen bisher fast nur mechanisch betrieben und deshalb wurde man im Un-

terricht mit demselben so schnell fertig. Ich will aber das Zahlensystem und im Zusammenhang damit das Zahlenschreiben und Zahlenlesen zum vollsten Verständnis bringen und bin darum gezwungen, auch den Übungen darin eine ungleich größere Ausdehnung einzuräumen. Ich werde die letzteren, wie gesagt, zu einer besonderen Stufe erheben. Und wie in den gegenwärtigen Leitfäden und Aufgabensammlungen die Aufschrift „Vorübung auf das Speziesrechnen“ andeutet, daß das darunter Begriffene als etwas Nebensächliches und Untergeordnetes betrachtet werden darf, so soll meine Überschrift „Stufe“ ankündigen, daß das mit diesem Worte Bezeichnete etwas Wichtiges, dem Addieren, Subtrahieren 2c. Ebenbürtiges ist und deshalb mit derselben Sorgfalt, mit demselben Zeit- und Kraftaufwand gelehrt werden muß, wie die eben genannten Rechenarten.

---

2. Stufe: Addieren.

Lehrverfahren. — Lehrer: „Eines von euch muß die Zahlen, die ich angeben werde, am Rechentisch auflegen. Wir anderen wollen sie in Ziffern mitschreiben, ich auf der Wandtafel, ihr auf euern Schiefertafeln, und zwar werden wir jede Zahl in Einer und Zehner zerlegen und die Ziffern beim Schreiben schnurgerade unter einander setzen, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner. — Also, gebt Acht! — 25!“ — Der manipulierende Schüler legt 2 Zehnpfennigstücke in das Zehner- und 5 einzelne Pfennige in das Einerfeld und spricht dabei: „25 sind 2 Zehner“ (der Lehrer und die übrigen Schüler schreiben die Ziffer 2 auf ihre Tafeln), „5 Einer!“ (die Ziffer 5 wird geschrieben). — Lehrer: „Sind das Markstücke oder Pfennige?“ — Schüler: „Pfennige.“ — Lehrer: „Wir wollen hinter 25 das Pfennigzeichen (₰) setzen.“ — Geschieht.

Lehrer: „Und 36!“ — Der Schüler am Rechentisch spricht während des Auflegens: „36 sind 3 Zehner“ (Lehrer: „Halt! Wohin werden wir die Ziffer 3 schreiben?“ — Schüler: „Schnurgerade unter 2.“) „6 Einer!“ (Lehrer: „Unter welche Ziffer werden wir die 6 setzen?“ — Schüler: „Unter 5.“) — Lehrer: „Weil die 36 ebenfalls Pfennige sind, so wollen wir unter das Pfennigzeichen (₰) Gänsefüßchen („) zeichnen. — Was deuten die Gänsefüßchen an?“

Lehrer: „Und 62!“ — Schüler: „62 sind 6 Zehner, 2 Einer.“ — Lehrer: „Wohin werden wir die 6 Zehner schreiben? — wohin die 2 Einer? — Was werden wir unter das Pfennigzeichen machen?“

Lehrer: „Leset nun von eueren Tafeln ab, was wir geschrieben haben!“ — Schüler: „25 ₰ und 36 ₰ und 62 ₰“ — Lehrer: „Wir wollen nun ausrechnen, wie viel die drei Zahlen zusammen

machen. Seht auf den Rechentisch! — Wo liegen die einzelnen Pfennige oder Einer? — Wie viel sind es? Zählt sie!“ — Die Schüler zählen und überzeugen sich, daß die gegebene Anzahl von Einern 13 beträgt. — Lehrer: „13 Einer sind aber wie viele Zehner?“ — Schüler: „1 Zehner, 3 Einer.“ — Lehrer: „Was werden wir mit den 10 Pfennigen thun?“ — Schüler: „Wir werden sie in eine Rolle schieben und auf das Zehnerfeld legen.“ — Lehrer: „Wie viele Einer bleiben dann noch auf dem Einerfeld liegen?“ — Schüler: „3 Einer.“ — Lehrer: „Mache die Zehnerrolle fertig und lege sie auf das zweite Feld zu den anderen Zehnern! — Zähle nun auch die Zehner auf der Rechenplatte! Wie viel sind es?“ — Schüler: „12 Zehner.“ — Lehrer: „12 Zehner sind wie viele Hunderter?“ — Schüler: „1 Hunderter, 2 Zehner.“ — Lehrer: „Was wird mit dem Hunderter zu geschehen haben?“ — Schüler: „Wir müssen ihn in das Hunderterfeld bringen.“ — Lehrer: „Thue das!“ — Es geschieht. — Lehrer: „Was kommt also heraus?“ — Schüler: „1 Hunderter, 2 Zehner, 3 Einer.“ — Lehrer: „Das sind wie viele Pfennige?“ — Schüler: „123 ₰.“ — Lehrer: „Wie viele Mark?“ — Schüler: „1 Mark 23 ₰.“

Lehrer: „Gut! Ganz dasselbe wollen wir auch an unseren Ziffern ausrechnen. Seht auf die Wandtafel! Was werden wir zuerst zusammenzählen?“ — Schüler: „Die Einer.“ — Lehrer: „Und dann?“ — Schüler: „Die Zehner.“ — Lehrer: „Macht unter 62 einen wagrechten Strich und addiert die Einer!“ — Schüler: „2 und 6 ist 8 und 5 ist 13.“ — Lehrer: „13 Einer sind wie viele Einer und Zehner?“ — Schüler: „3 Einer, 1 Zehner.“ — Lehrer: „Was schreibt man an, was zählt man hinüber?“ — Schüler: „3 Einer schreibt man an, 1 Zehner zählt man hinüber.“ — Lehrer: „Was zählt man jetzt zusammen?“ — Schüler: „Die Zehner.“ — Lehrer: „Zähle!“ — Schüler: „1 und 6 ist 7 und 3 ist 10 und 2 ist 12.“ — Lehrer: „12 Zehner sind wie viele Zehner und Hunderter?“ — Schüler: „2 Zehner, 1 Hunderter.“ — Lehrer: „Schreibt! — Was kommt demnach bei unserer schriftlichen Rechnung heraus?“ — Schüler: „123.“ — Lehrer: „Was sind das?“ — Schüler: „Pfennige.“ — Lehrer: „Setzt hinter 123 das Pfennigzeichen (₰)! — Wie viele Mark sind es?“ — Schüler: „1 Mark 23 ₰.“ — Lehrer: „Macht nach den 123 ₰ das Gleichheitszeichen (=), schreibt dann noch 1 Mark 23 ₰ und unterstreicht es mir!“ — Geschieht. — Lehrer: „Was haben wir vorhin am Rechentisch herausgebracht?“ — Schüler: „Ebenfalls 1 Mark 23 ₰.“ — Lehrer: „Nachdem unser schriftliches Ergebnis mit jenem auf der Rechenplatte vollständig übereinstimmt, was folgt daraus?“ — Schüler: „Dies, daß richtig gerechnet wurde.“

Skizzierter Lehrplan für diese Stufe:

1. Übung: Addieren von Pfennigen im Zahlenraume 1 bis 1000 ohne Überzählen.

Mündl. Aufgaben: a) 117 + 2, b) 420 + 15, c) 346 + 30, d) 265 ₰ + 24 ₰.

Schriftl. Aufgaben:

a)	b)	c)	d)
1 ₰	30 ₰	24 ₰	300 ₰
3 „	20 „	33 „	240 „
4 „	30 „	32 „	117 „

2. Übung: Addieren von Pfennigen im gleichen Zahlenraume aber mit Überzählen (leichtere Fälle und kleinere Zahlen). — Überzählen über den Hunderter im Kopf.

Mündl. Aufgaben: a) 98 + 8, b) 90 + 50, c) 80 + 36.

Schriftl. Aufgaben: a) 5 ₰ + 3 ₰ + 4 ₰ + 6 ₰ + 2 ₰, b) 25 ₰ + 9 ₰ + 17 ₰ + 8 ₰ + 34 ₰, c) 20 ₰ + 30 ₰ + 40 ₰ + 50 ₰, d) 48 ₰ + 51 ₰ + 67 ₰ + 74 ₰.

3. Übung: Addieren von Pfennigen mit Überzählen (schwierigere Aufgaben und größere Zahlen).

Mündl. Aufgaben: a) 97 + 60, b) 75 + 43, c) 39 ₰ + 85 ₰.

Schriftl. Aufgaben: a) 154 ₰ + 48 ₰ + 96 ₰ + 9 ₰ + 65 ₰, b) 2000 ₰ + 3000 ₰ + 726 ₰ + 45 ₰ + 4067 ₰.

4. Übung: Addieren von Mark und Pfennigen; Überzählen über den ersten Tausender im Kopf.

Mündl. Aufgaben: a) 900 + 200, b) 990 + 30, c) 998 + 9, d) 600 + 917.

Schriftl. Aufgaben:

a)	b)
3 ℳ 12 ₰	72 ℳ 56 ₰
2 „ 17 „	20 „ — „
1 „ 40 „	9 „ 84 „

---

3. Stufe: Subtrahieren.

Lehrverfahren. — Lehrer: „Schreibt mir die Aufgabe an

423 ₰
— 168 „

Seht dann auf den Rechentisch! — Von welcher Zahl soll abgezogen werden?" — Schüler: „Von 423." — Lehrer: „Lege 423 ₰ auf!" — Geschieht. — Lehrer: „Was werden wir wohl zuerst abziehen?" — Schüler: „Die 8 Einer." — Lehrer: „Was hernach?" — Schüler: „Die 6 Zehner." — Lehrer: „Was zuletzt?" — Schüler: „Den Hunderter." — Lehrer: „Ziehe die 8 Einer von den 3 Einern ab, oder mit anderen Worten, nimm 8 Einer weg!" — Schüler: „8

von 5 geht nicht.“ — Lehrer: „Was wirst du daher thun?“ — Schüler: „Ich werde darum einen Zehner herübernehmen.“ — Lehrer: „Wie viele Zehner liegen auf unserem Zehnerfeld?“ — Schüler: „2 Zehner.“ — Lehrer: „Wie viel bleiben, wenn du einen herübernimmst?“ — Schüler: „1 Zehner.“ — Lehrer: „Öffne die Zehnerrolle, welche Du herübergeholt hast und schütte ihren Inhalt auf das Einerfeld! Ein Zehner hat wie viel Einer?“ — Schüler: „10 Einer.“ — Lehrer: „Das macht, zu den 3 Einern gezählt, welche schon vorher dort lagen, wie viel?“ — Schüler: „13 Einer.“ — Lehrer: „Nimm jetzt von den 13 Einern die 8 Einer weg und sage, wie viel bleibt?“ — Schüler: „8 von 13 bleibt 5.“ — Lehrer: „Nachdem wir die Einer abgezogen haben, was werden wir jetzt thun?“ — Schüler: „Wir werden die Zehner abziehen.“ — Lehrer: „Nimm 6 Zehner von dem einen Zehner weg!“ — Schüler: „6 von 1 geht nicht.“ — Lehrer: „Was wird deshalb geschehen müssen?“ — Schüler: „Man muß einen Hunderter herübernehmen.“ — Lehrer: „Ein Hunderter hat wie viel Zehner?“ u. s. f.

Lehrer: „Wir wollen die gleiche Aufgabe auch schriftlich lösen. Ich werde es euch vormachen. Seht an die Wandtafel!

  423 ₰
— 168 „
―――――

Zuerst zieht man die Einer ab. 8 von 3 geht nicht; nimmt man einen Zehner herüber.“ (Der Lehrer streicht dabei die 2 Zehner durch.) „Zuerst waren es 2 Zehner; jetzt ist es nur mehr 1 Zehner. Der Zehner hat 10 Einer; 10 und 3 ist 13.“ (Der Lehrer schreibt vor die Ziffer 3 einen 1.) „8 von 13 bleibt 5. Die 5 Einer schreibt man an. — Jetzt zieht man die Zehner ab. 6 von 1 kann man nicht; nimmt man einen Hunderter herüber. Zuerst waren es 4 Hunderter, jetzt sind es nur mehr 3 Hunderter. Der Hunderter hat 10 Zehner. 10 und 1 ist 11.“ (Der Lehrer schreibt vor die durchstrichene 2 wieder einen 1.) „6 von 11 bleibt 5. Die 5 Zehner schreibt man an. — Zuletzt zieht man die Hunderter ab. 1 von 3 bleibt 2. Zwei Hunderter schreibt man an. — 423 ₰ weniger 168 ₰ sind 255 ₰ oder 2 Mark 55 ₰.“

Skizzierter Lehrplan für die 3. Stufe.

1. Übung: Abziehen ohne Entlehnen.

Mündl. Aufgaben: a) 237—5, b) 70—30, c) 53—20, d) 129—18.

Schriftl. Aufgaben: a) 90 ₰ — 40 ₰, b) 59 ₰ — 35 ₰, c) 700 ₰ — 400 ₰, d) 560 — 200 ₰, e) 658 ₰ — 245 ₰, f) 894 ₰ — 63 ₰.

2. Übung: Abziehen mit Entlehnen. (Leichtere Aufgaben und kleinere Zahlen.)

Mündl. Aufgaben: a) 102—4, b) 110—50, c) 120—38.

Schriftliche Aufgaben: a) 30 ₰ — 16 ₰, b) 35 ₰ — 9 ₰, c) 800 ₰ — 120 ₰.

3. Übung: Abziehen mit Entlehnen. (Schwierigere Aufgaben und größere Zahlen.)

Mündliche Aufgaben: a) 108—40, b) 139—50, c) 104—91, d) 125—61.

Schriftliche Aufgaben: a) 400 ₰ — 260 ₰, b) 304 ₰ — 235 ₰, c) 1000 ₰ — 485 ₰.

4. Übung: Rechnen mit Mark und Pfennigen. Das Zählen unter den ersten Tausender im Kopf.

Mündliche Aufgaben: a) 1100—200, b) 1063—80, c) 1006—9, d) 1640—730.

Schriftliche Aufgaben: a) 3 ℳ 50 ₰ — 2 ℳ 20 ₰, b) 40 ℳ 80 ₰ — 97 ₰, c) 1000 ℳ — 225 ℳ 50 ₰.

---

4. Stufe: Multiplizieren.

Lehrverfahren für das Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator. — Lehrer: „Schreibt die Aufgabe

504 ₰
× 2

Seht dann auf den Rechentisch! — Welche Zahl soll zweimal genommen werden?“ — Schüler: „Die Zahl 504!“ — Lehrer: „Lege dieselbe in Geldstücken auf!“ — Geschieht. — Lehrer: „Was wird man zuerst vervielfachen (vermehren)?“ — Schüler: „Die Einer.“ — Lehrer: „Was dann?“ — Schüler: „Die Zehner.“ — Lehrer: „Was zuletzt?“ — Schüler: „Die Hunderter.“ — Lehrer: „Wie oftmal mußt du die Einer nehmen?“ — Schüler: „Zweimal.“ — Lehrer: „Was mußt du also zu den 4 Pfennigen, welche bereits auf der Rechenplatte liegen, noch hinzuthun?“ — Schüler: „Weitere 4 Pfennige.“ — Lehrer: „Zweimal 4 Pfennige sind?“ — Schüler: „8 Pfennige.“ — Lehrer: „Nachdem die Einer vervielfacht sind, was wird man jetzt multiplizieren?“ — Schüler: „Die Zehner.“ — Lehrer: „Sind Zehner vorhanden?“ — Schüler: „Nein!“ — Lehrer: „Du kannst darum übergehen zum?“ — Schüler: „Zum Vervielfachen der Hunderter.“ — Lehrer: „Wie oft mal mußt du die 5 Hunderter nehmen?“ — Schüler: „Zweimal.“ — Lehrer: „Thue das! — Wie viele Hunderter erhältst Du?“ — Schüler: „10 Hunderter.“ — Lehrer: „10 Hunderter sind?“ — Schüler: „1 Tausender.“ — Lehrer: „Was wirst du mit den 10 Hundertern thun?“ — Schüler: „Ich bringe sie in ein Säckchen und lege sie auf das Tausenderfeld.“ — Lehrer: „Lies nun von unserer Rechenplatte ab, wie viele Tausender, Hunderter ꝛc. herauskommen?“ — Schüler: „1 Tausender,

0 Hunderter, 0 Zehner, 8 Einer." — Lehrer: „Das sind wie viele Pfennige?" — Schüler: „1008 Pfennige." — Lehrer: „Wie viel Hunderter oder Mark?" — Schüler: „10 Mark 8 Pfennige."

Lehrer: „Laßt uns nun das Nämliche auch schriftlich berechnen! Seht mir zu!

504 ₰
× 2

Zweimal 4 ist 8; 8 Einer schreibt man an. Zweimal 0 ist 0; 0 Zehner schreibt man an. Zweimal 5 ist 10; 10 Hunderter sind 0 Hunderter (0 schreibt man an), 1 Tausender (1 schreibt man an). — Zweimal 504 Pfennige sind also 1008 Pfennige oder 10 Mark 8 Pfennige.

Das letzte Ergebnis (10 Mark 8 Pfennige) wird unterstrichen."

Skizzierter Lehrplan für die 4. Stufe.

1. Übung: Das Vervielfachen der reinen Zehner, reinen Hunderter und reinen Tausender durch einstelligen Multiplikator.

Mündlich und schriftlich: a) 3 × 20 ₰, b) 4 × 600 ₰, c) 2 × 2000 ₰.

2. Übung: Das Vervielfachen gemischter Zehner.

Mündliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen) 3 × 33, b) (mit Überzählen) 3 × 75, c) (angewandte Aufgaben). Wenn ein Pfund 52 Pfennige kostet, was kosten dann 6 Pfund?

Schriftliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen) 24 ₰ × 2 b) (mit Überzählen) 28 ₰ × 9.

3. Übung: Das Vervielfachen gemischter Hunderter und Tausender.

Mündliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen) 4 × 712, 3 × 5300, b) (mit Überzählen) 2 × 796, 6 × 1250.

Schriftliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen) 321 ₰ × 4 b) (mit Überzählen) 5463 ₰ × 7.

4. Übung: Das Vervielfachen von Mark und Pfennigen. — Angewandte Aufgaben.

Mündliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen der Pfennige in Mark) 4 × 3 ℳ 20 ₰, b) (mit Überzählen und Verwandeln der Pfennige in Mark) 3 × 13 ℳ 40 ₰, c) (Preisberechnungen) 1 Dutzend kostet 2 ℳ 50 ₰, was kosten 7 Dutzend?

Schriftliche Aufgaben: a) (ohne Überzählen der Pfennige in Mark) 72 ℳ 10 ₰ b) (mit Überzählen der Pfennige in Mark) 2046 ℳ 25 ₰
× 9   × 8

c) (leichtere Preisberechnungen) 1 m kostet 75 ₰, ? 6 m; d) (schwierigere Preisberechnungen) 1 Flasche Wein kostet 4 ℳ 55 ₰, ? 9 Flaschen.

---

5. Stufe: Dividieren im Sinne des Enthaltenseins oder fortgesetzten Subtrahierens.

Es müssen, wie im theoretischen Teile ausführlicher entwickelt wurde, vor allem zwei Divisionsarten unterschieden werden, nämlich die Division im Sinne des Enthaltenseins oder der fortgesetzten Subtraktion und jene im Sinne des eigentlichen Teilens. Um nun diese beiden wesentlich verschiedenen Spezies auch in der schriftlichen Darstellung zur Unterscheidung zu bringen, scheint es mir notwendig, daß man dem Dividendus oder auch dem Divisor eine sachliche Bezeichnung hinzufügt, daß man Divisionsaufgaben nie ohne Benennung anschreibt, daß man also für die erstere Divisionsart (Division im Sinne des Enthaltenseins) etwa folgende Form wählt

2 ₰ | 24 ℳ 50 ₰

(wird gelesen: 2 ₰ von 24 ℳ 50 ₰ geht wie oftmal? oder 2 ₰ sind in 24 ℳ 50 ₰ wie oftmal enthalten?), das eigentliche Teilen oder richtiger Verteilen aber auf diese Weise ausdrückt

2 | 24 ℳ 50 ₰

(ist zu lesen: der zweite Teil von 24 ℳ 50 ₰ beträgt wie viel?)

Nur so kommt volle Klarheit in das Lösungsverfahren. Der Schüler weiß dann: wenn Divisor und Dividendus zugleich eine Benennung haben, so ist die Division im Sinne des Enthaltenseins oder der fortgesetzten Subtraktion verlangt, wenn aber bloß der Dividendus eine Sachbezeichnung erhalten hat, so kann nur das eigentliche Teilen gemeint und gefordert sein. Damit wäre dem bis jetzt üblichen, kopflosen Mechanismus, nach welchem die wesensverschiedensten Divisionsaufgaben auf ein und dieselbe Weise angeschrieben, gelesen und berechnet werden, für immer eine Schranke gezogen.

Wenn ich sodann, wie sich der Leser überzeugt hat, den Divisor vor den Dividenden setze, nicht aber, wie unsere neueren und neuesten Rechenmethodiker, hinter denselben, so sind für mich folgende Gründe Ausschlag gebend. Erstens: Wer eine Divisionsaufgabe zur Berechnung aufgibt, spricht ja auch den Divisor früher aus als den Dividenden, er sagt also: Suche den zweiten Teil von 4200 ℳ! Rechne aus, wie oftmal 2 ℳ in 7564 ℳ enthalten sind! Was ist nun natür-

licher, als daß man die Aufgabe ganz in der nämlichen Reihenfolge anschreibt, in welcher man sie spricht, daß man darum den Divisor auch vor den Dividenden setzt (2 | 4200 *M*, 2 *M* | 7564 *M*) und nicht hinter denselben (4200 *M* : 2, 7564 *M* : 2 *M*)? — Zweitens: Ist die Divisionsaufgabe in der künstlichen modernen Form angeschrieben, so wird man beim Ablesen den Dividenden in der Regel vor dem Divisor nennen, man wird also die obigen Beispiele: 4200 *M* : 2 und 7564 *M* : 2 *M* so aussprechen: 4200 *M* geteilt durch 2, 7564 *M* geteilt durch 2 *M*. Dadurch wird aber der wesentliche Unterschied, der zwischen der Division im Sinne des Teilens und jener im Sinne des Enthaltenseins besteht, nahezu ganz verwischt und unkenntlich gemacht. Wie ganz anders ist meine Anschreib- und Leseweise beschaffen! Der Schüler muß dabei zwischen Enthaltensein und Teilen auf das genaueste unterscheiden, denn das einemal denkt und spricht er: Der zweite Teil von 4200 *M* beträgt wie viel? und das anderemal: 2 *M* sind in 7564 *M* wie oftmal enthalten? oder auch: Wie oftmal kann ich 2 *M* von 7564 *M* wegnehmen? So verschieden die Sache ist, so wesentlich verschieden ist hier die logische und sprachliche Form, in der wir sie ausdrücken. — Drittens und letztens ist meine Darstellungsweise der Divisionsexempel uralt, seit unvordenklichen Zeiten hat man den Divisior vor den Dividenden geschrieben und beide Zahlen durch einen kurzen senkrechten Strich (Divisionsstrich) getrennt. Ich sehe nicht ein, weshalb man diesen Brauch, der sich im Volke so sehr und fest eingebürgert hat, ohne triftigen Grund aufgeben soll.

Lehrverfahren. — Lehrer: „Schreibt die Aufgabe

2 ₰ | 2450 ₰.

Was müßt ihr berechnen?“ — Schüler: „Wie oftmal 2 ₰ von 2450 ₰ weggenommen werden können.“ — Lehrer: „Diese Aufgabe kann man nicht auf einmal, sondern nur nach und nach und stückweise lösen. Zuerst müssen wir die Tausender teilen, dann die Hunderter, hernach die Zehner, zuletzt die Einer. Was werde ich zuerst teilen? — was darauf? — was dann? — was zuletzt? — Seht mir jetzt zu! — 2 von 2tausend geht 1tausendmal; die Ziffer 1 wird hinausgeschrieben, dabei aber zugleich gedacht, daß sie einen Tausender vorzustellen hat. Nun wird vermehrt und abgezogen. 1tausendmal 2 ist 2tausend; die 2 Tausender schreibt man schnurgerade unter 2; 2 von 2 hebt sich. — Jetzt werden die Hunderter geteilt; ich werde darum die 4 durchstreichen und herunterschreiben. 2 ist in 4hundert 2hundertmal. Die Ziffer 2 wird hinausgeschrieben, dabei aber wieder gedacht, daß es Hunderter sind. Dann wird vermehrt und abgezogen. 2hundertmal 2 ist 4hundert. 4 kommt schnurgerade unter 4. 4 von 4 hebt sich. — Nun werden die Zehner geteilt; ich werde aus diesem Grunde die Ziffer 5 durchstreichen und

herunterſetzen. 2 iſt in 4zig zwanzigmal. 2 wird hinausgeſchrieben, dabei denke ich aber an 2 Zehner oder Zwanzig. Jetzt wird wieder vermehrt und abgezogen. Zwanzigmal 2 iſt 4zig. 4 ſchreibe ich ſchnurgerade unter 5. 4 von 5 bleibt 1. — Zuletzt werden die Einer geteilt. Ich ſtreiche darum die 0 durch und ſetze ſie herunter hinter 1. 2 in 10 iſt 5mal. 5 ſchreibt man hinaus. Nun wird vermehrt und abgezogen. 5mal 2 iſt 10. 10 von 10 hebt ſich. — 2 ₰ laſſen ſich ſonach von 2450 ₰ 1225mal wegnehmen. Hinter das Ergebnis (die Zahl 1225) ſchreibe ich noch das Wörtchen „mal“ oder auch das Multiplikationszeichen (×).“

Unſere Diviſionsaufgabe erhält ſonach folgende Geſtalt:

```
2 ₰ | 2450 ₰ = 1225 mal
      2
      -4
       4
       -5
        4
        10
        10
        —
```

Skizzierter Lehrplan für die 5. Stufe.

1. Übung: Der Diviſor geht in jeder einzelnen Ziffer des Dividenden ohne Reſt auf.

Mündlich und ſchriftlich: a) 2 ₰ | 20 ₰, 2 ₰ | 400 ₰, 3 ₰ | 27000 ₰, b) 2 ₰ | 26 ₰, 3 ₰ | 9363 ₰.

2. Übung: Der Diviſor geht wohl in der ganzen Zahl, nicht aber in jeder einzelnen Ziffer ohne Reſt auf.

Mündlich: a) Einüben der Hauptzahleu für das Teilen durch 2, 3, 4 . . . . 10. Beiſpiel: Die Hauptzahlen für das Teilen durch 2 ſind 20, 40, 60 . . . . 200; die Hauptzahlen für das Teilen durch 3 ſind 30, 60, 90 . . . . 300. b) Wie oft geht 2 von 32 (36, 48, 50 ꝛc.)? — 3 von 42 (45, 78, 204 ꝛc.)?

Schriftlich: a) 2 ₰ | 174 ₰; b) 6 ₰ | 4572 ₰.

3. Übung: Rechnen mit ℳ und ₰. Angewandte Aufgaben.

Mündlich: a) Wie oft kann ich 2 ₰ von 7 ℳ 50 ₰ wegnehmen? b) 95 ℳ ſind wie viele Fünfmarkſtücke? c) 1 Stück koſtet 9 ₰, wie viel Stücke erhalte ich um 5 ℳ 40 ₰?

Schriftlich: a) 4 ₰ | 123 ℳ 80 ₰; b) 18 ℳ 50 ₰ ſind wie viele Fünfpfennigſtücke? c) Um 7 ₰ bekommt man ein Stück, wie viel um 15 ℳ 40 ₰?

---

6. Stufe: Dividieren im Sinne des Teilens (Verteilens).

Lehrverfahren. — Lehrer: „2 m kosten 24 ℳ 50 ₰, was kostet 1 m?“ — Schüler: „1 m kostet den 2. Teil von 24 ℳ 50 ₰.“ — Lehrer: „Gut! Wir wollen auf unserer Tafel berechnen, wie viel der 2. Teil von 24 ℳ 50 ₰ macht. In was werden wir aber vorher die Mark umwandeln?“ — Schüler: „In Pfennig.“ — Lehrer: „24 ℳ 50 ₰ sind?“ — Schüler: „2450 ₰.“ — Lehrer: „Schreibt

2 | 2450 ₰ =

Diese Aufgabe kann ich wiederum nicht auf einmal, sondern nur in Absätzen berechnen. Zuerst werde ich die Tausender teilen, dann die Hunderter, darauf die Zehner, hernach die Einer. — Ich werde euch die ganze Rechnung auf der Wandtafel vormachen. Seht mir aufmerksam zu! — Zuerst teilt man die Tausender. Der 2. Teil von 2 ist 1. 1 Tausender schreibt man hinaus. Jetzt wird vermehrt und abgezogen. 1 mal 2 ist 2; 2 schreibt man schnurgerade unter 2; 2 von 2 hebt sich. — Nun teilt man die Hunderter. Die Ziffer 4 streicht man durch und setzt sie herunter. Der 2. Teil von 4 ist 2. 2 Hunderter schreibt man hinaus. Jetzt wird vermehrt und abgezogen. 2 mal 2 ist 4; 4 schreibt man schnurgerade unter 5; 4 von 5 bleibt 1. — Zuletzt teilt man die Einer. Die 0 streicht man durch und setzt sie herunter hinter 1. Der 2. Teil von 10 ist 5. 5 Einer schreibt man hinaus. Jetzt wird wieder vermehrt und abgezogen. 5 mal 2 ist 10; 10 von 10 hebt sich. Der 2. Teil von 2450 ₰ ist also 1225 ₰ oder 12 ℳ 25 ₰. Das letzte Ergebnis (12 ℳ 25 ₰) wird unterstrichen.“

```
2 | 2450 ₰ = 1225 ₰ = 12 ℳ 25 ₰.
    2
    ---
    -4
     4
    ---
    -5
     4
    ---
     10
     10
    ---
     --
```

Skizzierter Lehrplan für die 6. Stufe.

1. Übung: Der Divisor geht in jeder einzelnen Ziffer des Dividenden ohne Rest auf.

Mündlich: a) Die Hauptzahlen für das Teilen durch 2 (nämlich 20, 40, 60 . . . . 200), durch 3 (d. i. 30, 60, 90 . . . . 300) ꝛc. ꝛc. Darauf veranschaulicht der Lehrer am Rechentisch mittelst der Zehnerrollen einige wenige Ergebnisse zu folgenden Reihen:

Der 2. Teil von 20 ist 10, von 40 ist 20 . . . von 200 ist 100,
der 3. Teil „ 30 „ 10, „ 60 „ 20 . . . „ 300 „ 100,
u. s. f.

und läßt sodann dieselben von den Schülern tüchtig memorieren.

b) Der 2. Teil von 1200 (1600, 2000, 10000, 40000); der 3. Teil von 90 (900, 1500, 12000).

c) Der 2. Teil von 24 (48, 104, 146, 812); der dritte Teil von 36 (93, 129, 1560, 12333).

Schriftlich: a) 2 | 1200 ₰; 2 | 40000 ₰; b) 3 | 6360 ₰; 5 | 10550 ₰.

2. Übung: Der Divisor geht wohl in der ganzen Zahl, nicht aber in jeder einzelnen Ziffer auf.

Mündlich: Der 2. Teil von 32 (56, 300, 740, 5000, 9200); der 3. Teil von 75 (192, 420, 870, 7200, 16500) ꝛc.

Schriftlich: a) 3 | 75 ₰; b) 6 | 4572 ₰.

3. Übung: Rechnen mit *M.* und ₰. Angewandte Aufgaben.

Mündlich: a) Wie viel beträgt der 2. Teil von 1 *M.* 60 ₰ (1 *M.* 24 ₰, 5 *M.* 40 ₰)? b) 4 Schachteln Bleisoldaten kosten 10 *M.* 40 ₰, was 1 Schachtel?

Schriftlich: a) 6 | 17 *M.* 40 ₰; b) 2 Paar Stiefelchen kosten 25 *M.* 50 ₰, was 1 Paar?

---

7. Stufe: Wiederholung und Rechnen mit Goldstücken und Banknoten.

Lehrer, ein Markstück zeigend: „Was ist das? — Hier habe ich ein Zehnmarkstück oder eine Krone. Wenn ich nun die einzelnen Markstücke, die Einer in das Einerfach der Schublade lege, in welches Fach werde ich dann die Zehnmarkstücke, die Zehner thun müssen? — Was ist mehr wert: eine Krone (Zehnmarkstück) oder eine Zehnerrolle (d. i. 10 einzelne Markstücke zur Rolle vereinigt)? — Hier habe ich eine Banknote. Wer von euch weiß, was sie gilt?" — Schüler: „10 Mark." — Lehrer: „Woran kennst du, daß sie 10 Mark wert ist?" — Schüler: „Weil es darauf gedruckt zu lesen ist." — Lehrer: „Aus was ist die Banknote?" — Schüler: „Aus Papier." — Lehrer: „Weil die Banknote ein Geld aus Papier ist, wie kann man sie darum nennen?" — Schüler: „Papiergeld." — Lehrer: „Es gibt auch Banknoten, welche 100 und 1000 Mark gelten. Als was kann ich dieselben noch bezeichnen, da sie ebenfalls aus Papier sind? — In welchem Gelde kann ich 10 *M.* bezahlen?" — Schüler: „In Silbergeld (10 Markstücke), in Goldgeld (ein Zehnmarkstück) und mit Papiergeld (eine Zehnerbanknote)." — Lehrer: „Mit welchem Gelde kann ich 100 *M.* bezahlen?" — Schüler: „Mit Silber (Rolle

aus 100 Markstücken), mit Gold (Rolle aus 10 Kronen), mit Banknoten (eine Hunderter- oder 10 Zehnerbanknoten)." — Lehrer: „In welches Fach werde ich die Hundertmarkbanknoten oder die Hunderter legen? — Wie, d. h. mit welchen Geldsorten kann ich 1000 *M.* bezahlen?" — Schüler: „Mit Silber (Säckchen mit 10 Hunderterrollen), mit Gold (Rolle aus 100 Kronen), mit Papier (1 Tausenderbanknote oder 10 Hunderterbanknoten).

Bemerkung: Diese ganze neue Einlage in den Rechentisch kann bloß gedacht oder fingiert sein. Wir dürfen unseren Schülern unbedenklich so viel Phantasie zutrauen, daß sie sich die Fächer der Rechenlade mit Gold und Papiergeld gefüllt zu denken vermögen.

1. Übung: Das Umwechseln der Münzen. Addieren und Subtrahieren.

a. Mündlich.

1. Das Umwechseln der niederen Sorte in eine höhere.

Wie viele Kronen (Zehnmarkstücke) erhalte ich gegen 20 (40, 80, 67, 93, 38) *M.*?

Wie viele Zehnerbanknoten bekomme ich für 17 (54, 100, 120, 160, 200, 215) *M.*?

Wie viele Doppelkronen (Zwanzigmarkstücke) für 40 (60, 80, 160, 200, 50, 70, 110) *M.*?

Wie viele Hunderterbanknoten kann ich eintauschen
a) gegen 300 (700, 650, 423) *M.*,
b) gegen 20 (30, 40, 90, 92) Kronen,
c) gegen 10, (15, 20, 25, 30, 35) Doppelkronen?

Wie viele Tausenderbanknoten gibt man mir
a) für 10 (20, 40, 70, 63, 85) Hunderterscheine,
b) für 100 (200, 500, 700, 600, 823) Kronen,
c) für 50 (100, 150, 200, 300, 250) Doppelkronen?

Wie viele Fünfmarkstücke empfange ich für 10, (15, 20, 70, 84, 100) *M.*?

Wie viele Fünfzigmarkbanknoten gegen 100, (200, 350, 400, 1000) *M.*?

2. Das Umwechseln der höheren Sorte in eine niedrigere.

Für 3 (5, 7, 9, 10, 15, 25, 36) Kronen oder Zehnerbanknoten bekomme ich a) wie viele *M.*? b) wie viele Doppelmark? c) wie viele Fünfmarkstücke?

Für 6 (10, 12, 14, 18, 20) Hunderterbanknoten gibt man mir a) wie viele Zehnerbanknoten oder Kronen? b) wie viele Doppelkronen? c) wie viele Fünfzigerbanknoten? d) wie viele Fünfmarkstücke? e) wie viele Doppelmark? f) wie viele einzelne Mark?

Gegen 3 (4, 7, 2, 5, 6, 10) Tausenderscheine wechselt man mir ein a) wie viele Hunderterbanknoten? b) wie viele Fünfzigerbanknoten?

c) wie viele Kronen? d) wie viele Doppelkronen? e) wie viele Fünfmarkstücke? f) wie viele Doppelmark? g) wie viele ℳ?

b) Schriftlich.

1. Das Addieren.

a) Das Addieren der ℳ

27 ℳ + 365 ℳ + 274 ℳ + 1 012 ℳ =?

20 324 ℳ + 3 736 ℳ + 4 232 ℳ + 17 315 ℳ =?

(Beim Resultat ist jederzeit anzugeben, mit welchen Geldsorten die betreffende Summe gezahlt werden könnte. Wenn also 12 365 ℳ herauskäme, so müßte der Schüler hinzufügen und zwar entweder nur mündlich oder auch schriftlich: „Kann bezahlt werden mit 12 Tausenderbanknoten, 3 Hunderterrollen, 6 Kronen und 1 Fünfmarkstück.")

b) Das Addieren der ℳ und ₰

24 ℳ 70 ₰ + 13 ℳ 6 ₰ + 80 ℳ + 126 ℳ 14 ₰ =?

3 217 ℳ + 4 028 ℳ 50 ₰ + 365 ℳ 20 ₰ + 2 000 ℳ =?

(Ist ebenfalls die Münzsorte im Ergebnis anzuführen.)

2. Das Subtrahieren.

a) Das Subtrahieren der ℳ

2 325 ℳ — 1 012 ℳ; 40 300 ℳ — 67 ℳ

b) Das Subtrahieren der ℳ mit ₰

365 ℳ 60 ₰ — 114 ℳ 34 ₰; 4 000 ℳ — 12 ℳ 75 ₰

(Angabe der Geldsorten, in welchen die resultierende Zahl erlegt werden könnte.)

2. Übung: Multiplizieren und Dividieren.

a) Mündlich.

1. Wiederholung des Einmaleins.

a) in Einern: 1 × 2 = 2, 2 × 2 = 4, 3 × 2 = 6 ꝛc.

b) in Zehnern: 1 × 20 = 20, 2 × 20 = 40, 3 × 20 = 60 ꝛc.

c) in Hundertern: 1 × 200 = 200, 2 × 200 = 400, 3 × 200 = 600 ꝛc.

d) in Tausendern: 1 × 2 000 = 2 000, 2 × 2 000 = 4 000 ꝛc.

2. Wiederholung der Reihen des Enthaltenseins oder der fortgesetzten Subtraktion und zwar ebenfalls

a) in Einern: 2 von 2 geht 1 mal, 2 von 4 geht 2 mal, 2 von 6 geht 3 mal ꝛc.

b) in Zehnern: 2 von 20 geht 10 mal, von 40 geht 20 mal, von 60 geht 30 mal ꝛc.

c) in Hundertern: 2 von 200 geht 100 mal ꝛc.

d) in Tausendern: 2 von 2000 geht 1 000 mal ꝛc.

3. Wiederholung der Reihen des eigentlichen Teilens oder Verteilens

a) in Einern: Der 2. Teil von 2 ist 1, der 2. Teil von 4 ist 2, der 2. Teil von 6 ist 3 ꝛc.

b) in Zehnern: Der 2. Teil von 20 ist 10 ꝛc.
c) in Hundertern: Der 2. Teil von 200 ist 100 ꝛc.
d) in Tausendern: Der 2. Teil von 2 000 ist 1 000 ꝛc.

b) Schriftlich.

1. Das Multiplizieren
a) der reinen *M.*
2 × 365 *M.*; 6 × 2 416 *M.* ꝛc.
b) der *M.* mit *₰*
3 × 422 *M.* 72 *₰*; 8 × 3 681 *M.* 56 *₰* ꝛc.

2. Das Dividieren im Sinne des fortgesetzten Subtrahierens (Enthaltens.)
a) mit reinen *M.*
2 *M.* | 4 682 *M.*; 9 *M.* | 27 315 *M.* ꝛc.
b) mit *₰* in *M.* und *₰*
6 *₰* | 12 *M.* 30 *₰* ꝛc.
c) mit *M.* und *₰*
1 *M.* 27 *₰* | 508 *M.*

3. Das Dividieren im Sinne des Teilens.
a) Der Dividend enthält nur *M.*
2 | 7384 *M.* =
b) Der Dividend besteht aus *M.* und *₰*
4 | 560 *M.* 24 *₰* =

Zweites Semester.

1. Stufe: Bilden, Schreiben und Lesen der Zahlen bis zu den Millionen.

Am Rechentisch vermochten wir nur die Zahlen von 1 bis zu den Tausenden zu versinnbildlichen. Aber soll der Tausender wirklich die Grenze bilden, über welche unsere Anschauungsmittel nicht mehr hinübertragen, soll die Möglichkeit, auch die Zehntausender, Hunderttausender und Millionen in irgend einer Weise zu verdeutlichen, gänzlich abgeschnitten sein? Ich meine, nachdem es uns einmal gelungen ist, den Tausendern mittelst unserer Rollen und Säckchen eine greifbare Gestalt zu geben, sollen wir versuchen, ob wir nicht auch noch größere Zahlen in eine anschauliche Form zu kleiden vermögen. Freilich konkrete, tastbare Dinge, wie unsere Pfennige, Rollen und Säckchen, werden wir den Kindern nicht mehr vorführen können, aber vielleicht vermögen wir irgendwelche bestimmte Vorstellungen in ihnen zu wecken, welche genau dasselbe leisten, wie die Spielmarken und die tauben, mit Sägkleie gefüllten Zehner- und Hunderterrollen, sowie die Tausendersäckchen

unseres Rechentisches. Wie, wenn man dem Schüler sagte, zehn solcher Tausendersäckchen füllen eine Kiste und zehn dergleichen Kisten kommen in einen großen Schrank, würde man dadurch die Vorstellung des Zehntausenders, des Hunderttausenders, obschon wir selbstverständlich weder die Kisten, noch die Schränke, von denen wir sprechen, wirklich in die Schule hereinschaffen können, nicht seinem Fassungsvermögen näher bringen?

Das wären ungefähr meine Ansichten über die Veranschaulichung sehr großer Zahlen.

Ich halte dieselbe also für möglich, ich halte sie aber auch für nützlich und belehrend und meine, der Lehrer sollte nicht darauf verzichten. Im Folgenden will ich nun kurz beschreiben, wie ich thatsächlich einmal den Zahlenraum 1 bis zur Billion vor einer zahlreichen Schülerklasse und zwar, wie ich ohne prahlerische Übertreibung hinzufügen darf, bei gespanntester Aufmerksamkeit meiner neun- bis zehnjährigen Zuhörer anschaulich entwickelt habe.

„Seht, Kinder," sagte ich, indem ich ihnen ein Markstück vorzeigte, „10 solcher Stücke geben eine kleine oder Zehnerrolle; 10 Zehnerrollen machen eine große oder Hunderterrolle. Wenn ich 10 Hunderterrollen nehme und in ein Säckchen schiebe, so habe ich einen Tausender, und wenn ich 10 solcher Säckchen in eine Kiste lege, so habe ich einen Zehntausender. Bringe ich sodann 10 derartige Kisten in einen großen Schrank, der fünf Fächer übereinander hat, von denen auf jedem Platz für zwei Kisten ist, so habe ich hunderttausend Mark, und stehen in einem Zimmer 10 von diesen Schränken, so macht das genau eine Million. 10 Zimmer, also eine große Wohnung, müßte ich mit derartigen Kästen verstellen, damit ich eine Zehnmillion erhielte, und ich müßte 10 solcher Wohnungen, also ein sehr großes Haus zu fünf Stockwerken mit je zwei Wohnungen mieten, um eine Hundertmillion unterbringen zu können. 10 große Häuser, das ist zwei Häuserreihen mit je fünf Nummern oder eine Gasse wären erforderlich zu einer Tausendmillion; 10 Gassen aneinandergereiht oder eine Straße zu einer Zehntausendmillion; 10 Straßen oder ein ganzer Stadtbezirk zu einer Hunderttausendmillion und endlich eine große Stadt mit 10 Stadtbezirken und 10 000 großen Häusern (Kasernen) zu einer Billion. Um eine Billion Mark unter Dach bringen zu können, müßten also sämtliche Wohnungen und Häuser einer Weltstadt wie Paris oder London von den Menschen geräumt und von oben bis unten mit Geldschränken verstellt werden, ja es wäre noch sehr fraglich, ob jene Räumlichkeiten ausreichen würden, da wohl in keiner der beiden Städte 10 000 solch' großer Häuser stehen und da sich in den Häuschen und Hütten der ärmeren Bevölkerung, und wenn dieselben nach Hunderttausenden zählen sollten, nur wenig bergen läßt. — Ich will das eben Entwickelte ganz kurz wiederholen!

10 Markstücke geben eine Zehnerrolle,
10 Zehnerrollen geben eine Hunderterrolle,
10 Hunderterrollen füllen einen Sack (Tausender),
10 Säcke füllen eine Kiste (Zehntausender),
10 Kisten füllen einen Schrank (Hunderttausender),
10 Schränke füllen ein Zimmer (Million).

Wir wollen sodann annehmen,

10 Zimmer machten eine Wohnung aus (Zehnmillion),
10 Wohnungen machten ein Haus aus (Hundertmillion),
10 Häuser bildeten eine Gasse (Tausendmillion),
10 Gassen bildeten eine Straße (Zehntausendmillion),
10 Straßen bildeten einen Stadtteil (Hunderttausendmillion),
10 Stadtteile bildeten eine Weltstadt (Billion)."

Was nun speziell das Schreiben und Lesen der größeren Zahlen betrifft, so läßt man dem Schüler vor allem die Regel abstrahieren und einprägen, daß die Tausender drei Ziffern im Gefolge, die Millionen aber die doppelte Anzahl, also sechs, bei sich haben, sowie daß beim Anschreiben zwischen je drei Ziffern ein kleiner Raum (Abstand) gelassen werden muß, um auf den ersten Blick erkennen zu können, daß es Tausender resp. Millionen sind. Alles Übrige ist sehr einfach. Es wird eine Zahl nach der anderen aus der Aufgabensammlung oder von der Wandtafel gelesen, darauf vom Einzelnen oder im Chor zerlegt und schließlich Ziffer für Ziffer und zwar gleichzeitig und auf Kommando geschrieben. — Beispiel: 236 458. Lehrer: „Wie heißt diese Zahl! Leset sie! — Wie schreibt man sie aber?" — Schüler: „236 485 schreibt man: 2 Hunderttausender," sämtliche Kinder machen einen Zweier auf ihre Tafeln, „3 Zehntausender," die Ziffer 3 wird geschrieben, „6 Tausender", Ziffer 6 wird gemacht, „nach den Tausendern läßt man einen kleinen Abstand, 4 Hunderter, — 8 Zehner, — 5 Einer!"

---

2. Stufe: Addieren.

1. Übung: Addieren mit unbenannten und einfach benannten Zahlen.

a) Mündlich.

1. Addieren der Tausender, Zehntausender 2c. ohne Überzählen.
   5 000 + 1 624; 1 317 + 232; 200 000 + 600 000 2c.
2. Addieren der Tausender, Zehntausender 2c. mit Überzählen.
   7325 + 3 775; 80 000 + 50 000; 700 000 + 900 000 2c.

b) Schriftlich.

1. Unbenannte Zahlen.
   123 432 + 236 456 + 2 798 + 15 404 = ?

2. Einfach benannte Zahlen.
20 436 ℳ + 123 824 ℳ + 45 000 ℳ;
14 602 m + 265 314 m + 10 430 m;
1 624 l + 19 550 l + 40 365 l + 200 000 l;
103 675 Ztr. + 200 430 Ztr. + 365 917 Ztr.;

2. Übung: Addieren mit mehrfach benannten Zahlen (mehrsortige Größen).

a) Mündlich.

1. Unsere gebräuchlichsten hundertteiligen Maße und Gewichte. 1 m = 100 cm, 1 hl = 100 l, 1 Ztr. = 100 Pfd., 1 Buch = 100 Bogen.

a) Das Umwandeln der niedrigeren Sorte in die höhere.
100 cm = 1 m; 200 (400, 800, 1 000, 2 000, 6 000) cm ? m
100 l = 1 hl; 300 (700, 500, 1 000, 3 000, 8 000) l ? hl
100 Pfd. = 1 Ztr.; 500 (600, 900, 4 000, 7 000, 9 000) Pfd. ? Ztr.
100 Bogen = 1 Buch; 400 (800, 1 000, 5 000, 10 000) Bogen ? Buch.

b) Das Umwandeln der höheren Sorte in die niedrigere.
1 m = 100 cm; 2 (3, 7, 10, 20, 40, 15, 26) m ? cm
1 hl = 100 l; 4 (6, 8, 10, 20, 30, 17, 23, 38) hl ? l
1 Ztr. = 100 Pfd.; 5 (9, 40, 70, 12, 18, 26, 54) Ztr. ? Pfd.
1 Buch = 100 Bogen; 7 (8, 30, 60, 90, 13, 25) Buch ? Bogen.

2. Addieren mit unseren hundertteiligen Maßen.

a) 200 cm + 900 cm = ? m; 375 l + 428 l = ? hl; 264 Pfd. + 7 228 Pfd. = ? Ztr.; 300 Bog. + 186 Bog. = ? Buch.

b) 2 m 65 cm + 9 m 81 cm; 126 hl 25 l + 200 hl 75 l; 4 285 Ztr. 25 Pfd. + 6000 Ztr. 50 Pfd. ꝛc.

b) Schriftlich.

6 375 ℳ 75 ₰ + 4 212 ℳ 80 ₰ + 70 615 ℳ 91 ₰;
14 226 m 8 cm + 26 335 m + 45 613 m 45 cm;
20 356 hl 25 l + 30 675 hl 35 l + 4 296 hl 60 l;
135 792 Ztr. 40 Pfd. + 225 428 Ztr. 55 Pfd. + 386 912 Ztr. 70 Pfd.;
12 Buch 45 Bg. + 34 Buch 79 Bg. + 95 Bg.

---

3. Stufe: Subtrahieren.

1. Übung. Subtrahieren unbenannter und einfach benannter Zahlen.

a) Mündlich.

1. Leichtere Aufgaben.
1 000 — 367; 3 480 — 360; 80 000 — 40 000; 360 000 — 200 000 ꝛc.

2. Schwierigere Aufgaben.
1 320 — 740; 15 000 — 9 000; 47 000 — 19 300; 428 000 — 130 000 ꝛc.

b) Schriftlich.

1. Unbenannte Zahlen.
324 536 — 216 728
2. Einfach benannte Zahlen.
125 712 ℳ — 37 419 ℳ; 1 000 000 Ztr. — 725 550 Ztr.

2. Übung: Subtrahieren mehrfach benannter Zahlen.

a) Mündlich.

1. 6 000 cm — 2 500 cm = ? m;
2. 325 m 75 cm — 120 m 50 cm;

b) Schriftlich.

26 480 ℳ 90 ₰ — 12 500 ℳ 65 ₰;
300 700 hl 50 l — 150 625 hl 75 l.

---

4. Stufe: Multiplizieren.

1. Übung: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator. — Maße ꝛc. mit nicht dezimalen Währungszahlen.

a) Mündlich.

1. 2 × 1 325; 4 × 20 624 ꝛc.

2. 1 Dtz. = 12 Stück, 1 Mandel = 15 Stück, 1 Gros = 12 Dtz. = 144 Stück, 1 Schock = 60 Stück, 1 Schober = 60 Bund, 1 Jahr = 12 Monat = 52 Wochen = 365 Tage, 1 Monat = 30 Tage, 1 Tag = 24 Stunden, 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden.

3. 7 Dtz. = ? Stück; 9 Mandel = ? Stück; 5 Gros = ? Stück; 8 Jahre = ? Wochen ꝛc.

b) Schriftlich.

1. Unbenannte Zahlen.
2 × 1 002 365; 7 × 891 392 ꝛc.
2. Einfach benannte Zahlen.
3 × 4 327 Jahre; 5 × 244 620 Gros ꝛc.

2. Übung: Multiplizieren mit zweistelligem Multiplikator.

1. Der Multiplikator ist ein reiner Zehner.

Lehrverfahren. — Lehrer: „Lege am Rechentisch 3 ₰ auf!“ — Lehrer: „Diese 3 ₰ sollen mit 10 vermehrt, oder, was dasselbe ist, sie sollen 10 mal genommen werden. Was wirst du darum thun?“ — Schüler: „Ich werde an Stelle der 3 Pfennige 3 Zehnpfennige auflegen.“ — Lehrer: „Dürfen die 3 Zehner in das Einerfeld kommen?“ — Schüler: „Nein, sie müssen in das Zehnerfeld gebracht werden.“ — Lehrer: „10 mal 3 ₰ geben also wie viel Zehner?“ — Schüler: „3 Zehner.“ — Lehrer: „Wie viel Zehner erhält man, wenn man 5 (7, 6, 12, 37, 45) mit 10 vermehrt? — Wie schreibt man 4 (9,

8, 2, 15) Zehner in Ziffern?" — Schüler: „4 Zehner schreibt man: 0 Einer, 4 Zehner, oder 0 und vor dieselbe noch einen 4. — 9 Zehner schreibt man: 0 und voraus 9." — Lehrer: „Daraus ergibt sich für das schriftliche Rechnen folgende Regel: Eine Zahl wird mit 10 vermehrt, wenn man eine 0 macht und die zu multiplizierende Zahl vorausschreibt oder, was das gleiche ist, dieselbe noch mit 1 vermehrt. — Wir wollen diese Regel sogleich praktisch anwenden. Schreibt

137 ₰
× 10

Wie vermehrt man mit 10? — Macht eine Null und sprecht dabei: 0 Einer! — Was geschieht jetzt?" — Schüler: „Jetzt vermehrt man noch mit 1." — Lehrer: „1 mal 7 ist? — Gibt also wie viel Zehner? — Schreibt 7! — 1 mal 3 ist? — Gibt demnach wie viel Hunderter? — Schreibt 3! — 1 mal 1 ist? — Wie viel Tausender? — Schreibt 1! — Zehnmal 137 ₰ sind wie viele ₰? — Wie viele *M.*? — Schreibt es und unterstreicht das letzte Ergebnis! — Ich will euch nun auch sagen, wie man im Kopfe recht leicht mit 10 vermehren kann. — Vor allem muß man sich die betreffende Zahl in Ziffern vorstellen. Dann muß man ihr in Gedanken eine Null anhängen. Schließlich braucht man die vorgestellten Ziffern nur abzulesen. — Rechne im Kopf, wie viel 10 mal 254 ist! Was mußt du zuerst thun?" — Schüler: „Ich muß mir 254 in Ziffern denken." — Lehrer: „Was hat ferner zu geschehen?" — Schüler: „Der letzten Ziffer habe ich eine Null anzuhängen." — Lehrer: „Was ist das letzte?" — Schüler: „Ich muß die Zahl in Gedanken ablesen." — Lehrer: „Thue das! 10 mal 254 ist demnach wie viel?"

Lehrer: „Wir wollen die 3 am Rechentisch 20 mal nehmen. Zunächst werden wir die 3 ₰ verdoppeln. 2 mal 3 ist? — Dann werden wir die 6 Einer verzehnfachen, indem wir sie durch Zehner ersetzen und schließlich werden wir die 6 Zehner in das Zehnerfeld legen. — 20 mal 3 ₰ sind?"

Auf gleiche Weise kann man noch das Vermehren mit 30, 40, 50 ꝛc. auf der Rechenplatte veranschaulichen.

a) Mündliche Übungen.

1. Regeln: Mit 10 vermehrt man, wenn man eine Null anhängt.

Mit 20 vermehrt man, wenn man zuerst mit 2 und darauf noch mit 10 vermehrt, d. h. dem Ergebnis eine Null anhängt.

Mit 30 multipliziert man, wenn man zuerst mit 3 vermehrt und dann noch eine Null anhängt.

u. s. w u. s. w.

2. Anwendung dieser Regeln auf unbenannte Zahlen.

20 × 13 (17, 24, 30, 36, 48, 54);
30 × 12 (19, 27, 31 45, 72, 100);
u. s. w. u. s. w.

3. Benannte Aufgaben (Maße mit nicht dezimalen Währungszahlen).
10 (20, 30, 40, 50) Dtz. = ? Stück;
60 (70, 80, 90, 30) Gros = ? Dtz.;
90 (10, 80, 20, 70) Schock = ? Stück;
30 (60, 40, 80, 50) Schober = ? Bund.

b) Schriftliche Übungen.

1. Regeln für das schriftliche Rechnen:

Mit 10 vermehrt man, wenn man eine Null macht und noch mit 1 vermehrt.

Mit 20 vermehrt man, wenn man eine Null macht und noch mit 2 vermehrt.

Mit 30 vermehrt man, wenn man eine Null macht und noch mit 3 vermehrt.

u. s. w. u. s. w.

2. Unbenannte Aufgaben.
20 × 365; 40 × 4612; 70 × 20625.

2. Der Multiplikator ist ein gemischter Zehner.

a) Mündlich.

12 × 22 (40, 35, 78, 102, 325);
15 × 18 (36, 47, 53, 91, 222);
27 × 17 (24, 49, 62, 110, 300);
u. s. w.

Lösung: 12 mal 22; 12 ist 3 mal 4, demnach ist auch 12 mal 22 = 3 mal 4 mal 22; 4 mal 22 ist 88; 3 mal 88 ist 264, also 12 mal 22 = 264.

b) Schriftlich.

Lehrverfahren. — Der Lehrer schreibt irgend eine Multiplikationsaufgabe an die Tafel, also etwa folgende

327 *M.*
× 45

und erläutert dann: „Diese Rechnung kann ich nicht auf einmal lösen; ich muß sie in kleinere Stücke teilen. Zuerst werde ich rechnen wie viel 5 mal 327 ist, dann wie viel 4zig mal 327 ist und zuletzt werde ich zusammenzählen. Mit welcher Zahl wirst du also zuerst vermehren?“ — Schüler: „Mit 5.“ — Lehrer: „Darauf?“ — Schüler: „Mit 40.“ — Lehrer: „Was muß hernach geschehen?“ — Schüler: „Hernach muß man zusammenzählen.“ — Lehrer: „Wie vermehrt man mit 40?“ — Schüler: „Indem man eine 0 macht und noch mit 4 vermehrt.“ — Lehrer: „Beginne nun mit der Ausrechnung!“ — Nachdem das Resultat ermittelt ist, läßt der Lehrer Posten für Posten ablesen.

Angenommen, auf der Tafel stünde

```
   327 ℳ
 × 45
 ─────────
  1635 ℳ
 13080 „
 ─────────
 14571 ℳ
```

so müßte unser Schüler sprechen:

5 mal 327 ℳ sind 1635 ℳ;
40 „ 327 „ „ 13080 „;
45 „ 327 „ „ 14715 „.

Schriftliche Aufgaben.

1. Unbenannte Zahlen.
36 × 6358; 59 × 1240 ꝛc.
2. Benannte Zahlen
45 × 3279 hl.; 67 × 2314 ℳ ꝛc.

3. Übung: Multiplizieren mit drei- und vierstelligem Multiplikator.

1. Der Multiplikator ist ein reiner Hunderter oder Tausender.

Veranschaulichung am Rechentisch. — Lehrer: „Lege auf der Rechenplatte 3 ₰ auf! — Wir wollen diese 3 ₰ 100 mal nehmen. Wie kannst du das machen?“ — Schüler: „Indem ich die 3 Einer (Pfennige) durch Hunderter (Markstücke) ersetze.“ — Lehrer: „In welches Feld aber wirst du die 3 Hunderter (Markstücke) legen müssen?“ — Schüler: „In das Hunderterfeld.“

Lehrer: „Was hättest du zu thun, wenn die 3 ₰ mit 1000 vermehrt werden sollten?“ — Schüler: „Ich müßte die 3 ₰ gegen Tausendersäckchen austauschen und diese dann auf das Tausenderfeld schieben?“

a) Mündlich.

1. Regeln für das Kopfrechnen:

Mit 100 vermehrt man, wenn man zwei Nullen anhängt.

Mit 200 vermehrt man, wenn man zuerst mit 2 vermehrt und dann noch zwei Nullen anhängt.

Mit 300 vermehrt man, wenn man zuerst mit 3 vermehrt und dann noch zwei Nullen anhängt

u. s. w. u. s. w.

Mit 1000 vermehrt man, wenn man der betreffenden Zahl drei Nullen anhängt.

Mit 2000, wenn man zuerst mit 2 vermehrt und dann noch drei Nullen anhängt

u. s. w. u. s. w.

2. Unbenannte Aufgaben.
200 × 56; 300 × 350; 4 000 × 12; 5 000 × 220.

3. Benannte Aufgaben.
200 × 74 l = ? hl; 300 × 59 cm = ? m.

b) Schriftlich.

1. Regeln für das schriftliche Rechnen.

Mit 100 vermehrt man, wenn man zwei Nullen macht und noch mit 1 vermehrt.

Mit 200, wenn man zwei Nullen macht und noch mit 2 vermehrt
u. s. w. u. s. w.

Mit 1 000 vermehrt man, wenn man drei Nullen macht und noch mit 1 vermehrt.

Mit 2 000, wenn man drei Nullen macht und noch mit 2 vermehrt
u. s. w. u. s. w.

2. Unbenannte Aufgaben.
200 × 4 720; 800 × 20 375; 6 000 × 9 118.

3. Benannte Aufgaben
700 × 2 856 m; 300 × 20 375 hl; 9 000 × 4 825 ℳ.

2. Der Multiplikator ist ein gemischter Hunderter oder gemischter Tausender.

a) Mündlich.

(Nur die leichtesten Aufgaben.) — 103 × 25; 250 × 67 ꝛc. — Lösung: 103 mal 25. Zuerst vermehrt man mit 100, dann mit 3, dann zählt man zusammen. 100 mal 25 ist 2 500; 3 mal 25 ist 75; 2 500 und 75 ist 2 575; 103 mal 25 ist 2 575.

b) Schriftlich.

1. Unbenannte Aufgaben.
224 × 379; 406 × 1 820; 630 × 2 717; 2 500 × 1 780.

2. Benannte Aufgaben.
690 × 2 856 m; 966 × 1 325 ℳ; 1 500 × 2 175 Ztr.

4. Übung: Multiplizieren mehrfach benannter Größen dezimaler Währung.

a) Mündlich.

1. Man läßt dem Schüler die Regel abstrahieren und einprägen, daß durch das Verhundertfachen der Pfennige Mark, der cm m, der l hl, der Pfd. Ztr. und der Bogen Buch entstehen und stellt dann etwa folgende Aufgaben:

100 × 14 (27, 36, 42, 55, 63, 79) ₰ = ? ℳ
100 × 31 (56, 18, 29, 64, 85, 90) cm = ? m
u. s. w.
100 × 2 hl 27 l (14 hl 5 l, 6 hl 70 l.)
100 × 3 Buch 25 Bogen (10 Bch. 50 Bg., 4 Bch. 8 Bg.)
u. s. w.

200 × 26 (48, 60, 50, 83, 35) Pfd. = ? Ztr.
300 × 42 (65, 75, 28, 36, 44) ₰ = ? ℳ

u. s. w.

2. Regel für das Vertausendfachen der ₰, cm, l, Pfd. und Bg.
1 000 mal 1 ₰ = 10 ℳ; 1 000 mal 1 cm = 10 m; 1 000 mal 1 l = 10 hl; 1 000 mal 1 Pfd. = 10 Ztr.; 1 000 mal 1 Bogen = 10 Buch.
1 000 × 19 (23, 45, 61, 78, 94) cm = ? m
1 000 × 1 ℳ 20 ₰; 1 000 × 3 ℳ 5 ₰; 1 000 mal 7 hl 50 l.

b) Schriftlich.

1. Der Multiplikator ist ein reiner Zehner, Hunderter oder Tausender.
30 × 14 ℳ 20 ₰; 200 × 27 m 12 cm; 4 000 × 1 hl 15 l.
2. Der Multiplikator ist ein gemischter Zehner, Hunderter oder Tausender.
12 × 3 Ztr. 25 Pfd.; 115 × 3 Buch 20 Bg.; 1250 × 45 hl 75 l.

5. **Übung:** Angewandtes Multiplizieren (Schlußrechnung.)

a) Mündlich.

1 m kostet 2 ℳ 20 ₰, ? 10 m.
1 Kiste wiegt 2 Ztr. 25 Pfd., ? 20 Kisten.
1 Faß enthält 3 hl 50 l, ? 500 Fässer.
1 Seite eines Quadrates mißt 12 m 45 cm, ? alle vier Seiten?
1 Stück Tuch hat 28 m, ? haben 30 Stück.

b) Schriftlich.

1 Faß wiegt 12 Ztr. 45 Pfd., was wiegen 312 Fässer?
Lösung: „312 Fässer wiegen 312 mal 12 Ztr. 45 Pfd. Der Ansatz lautet deshalb

12 Ztr. 45 Pfd.
× 312

Zuerst berechne ich das Gewicht von 2 Fässern, darauf jenes von 10 Fässern, hernach das von 300 Fässern, zum Schluß addiere ich die drei Zahlen und erfahre dadurch, was die 312 Fässer zusammen wiegen." — Nachdem das Exempel, wie folgt

12 Ztr.	45 Pfd.		
× 312			
24	Ztr.	90	Pfd.
124	„	50	„
3 735	„	00	„
3 884	Ztr.	40	Pfd.

gelöst ist, muß der Schüler die Rechnung wieder in ihre einzelnen Teile zerlegen und darum sprechen: „2 Fässer wiegen 24 Ztr. 90 Pfd.; 10 Fässer wiegen 124 Ztr. 50 Pfd.; 300 Fässer 3 735 Ztr. und 312 endlich 3 884 Ztr. 40 Pfd.

---

5. Stufe: Dividieren im Sinne des Enthaltenseins.

1. Übung: Das Dividieren mit einstelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. 2 kann ich von 2 000 (40 000, 600 000, 8 000 000) wie oft mal wegnehmen?
   3 ist in 3 000 (90 000, 270 000, 24 000 000) wie oft mal enthalten?
   u. s. w.
2. 2 in 2 400 (42 000, 630 000, 10 600 000) ist wie oft mal?
   3 von 6 300 (90 015, 960 300, 45 045 045) geht „ „ „ ?
   u. s. w.

b) Schriftlich.

4 hl | 325 000 hl; 7 Ztr. | 294 399 Ztr.; 3 m | 12 365 220 m.

2. Übung: Das Dividieren mit zweistelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. 20 von 40 000 (60 000, 80 000, 100 000 000) geht wie oft mal?
   20 von 400 (600, 8000, 200 000, 400 000) „ „ „ „ ?
   30 von 30 000 (90 000, 60 000 000, 60 000) „ „ „ „ ?
   u. s. w.
2. 20 ist in 260 (4 820, 480 000, 60 040 020) wie oft mal enthalten?
   u. s. w.
3. 12 von 24 (48, 60, 84, 96, 120, 108, 84) geht wie oft mal?
   15 von 30 (90, 60, 150, 120, 180) geht wie oft mal?
   24 von 48 (96, 72, 120, 192, 240) „ „ „ „ ?
   u. s. w.
4. 96 (48, 108, 12, 84, 24, 60, 120, 240) Stück, ? Dtz.
   45 (105, 75, 135, 195, 240, 360, 4 500) Stück, ? Mandel.
   60 (180, 360, 240, 540, 120, 3 000) Bund, ? Schober
   u. s. w.

b) Schriftlich.

24 612 Stück = ? Dtz.; 3 621 000 Stück = ? Schock.

3. Übung: Dividieren mit drei- und vierstelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. 200 ist in 400 (6 000, 80 000, 200 000) wie oft mal enthalten?
   u. s. w.

2. 200 von 1 200 (400 600, 60 800, 612 000) geht wie oft mal?
u. s. w.

b) Schriftlich.

10372 Tage = Jahre; 4856000 Stück = ? Gros.

4. Übung: Dividieren mehrfach benannter Zahlen (dezimale Währung).

a) Mündlich.

1. 20 ₰ sind in 4 ℳ 40 ₰ wie oft mal enthalten?
50 l „ „ 18 hl 50 l „ „ „ „ ?
2. 12 ₰ können von 26 ℳ 40 ₰ wie oft mal genommen werden?
22 Pfd. können von 50 Ztr. 60 Pfd. wie oft mal genommen werden?

b) Schriftlich.

20 ₰ | 248 ℳ 60 ₰; 206 l | 8 244 hl 12 l.

5. Übung: Angewandtes Dividieren. (Schlußrechnung.)

a) Mündlich.

1 m Band kostet 1 ℳ 20 ₰, wie viel m bekommt man um 60 ℳ?

b) Schriftlich.

1 Faß enthält 1 hl 25 l Wein, wie viel Fässer lassen sich mit 451 hl 25 l füllen?

---

6. Stufe: Dividieren im Sinne des Teilens.

1. Übung: Das Teilen mit einstelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. Der 2. Teil von 2 000 (40 000, 600 000, 8 000 000) ist?
u. s. w.
2. Der 2. Teil von 5 000 (36 000, 326 000, 7 000 000) beträgt?
u. s. w.

b) Schriftlich.

2 | 379 542 ℳ; 4 | 325 849 hl; 3 | 12 365 490 Ztr.

2. Übung: Das Teilen mit zweistelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. Der 20. Teil von 200 (2 000, 40 000, 260 880) beträgt?
u. s. w.
2. Der 12. Teil von 24 (60, 72, 36, 240) ist?
„ 13. „ „ 39 (26, 130 000, 91 000 000) ist?
„ 25. „ „ 50 (200, 450, 800, 375, 625, 950) ist?
u. s. w.

b) Schriftlich.

60 | 37 415 840 ℳ =

3. Übung: Das Teilen mit drei- und mehrstelligem Divisor.

a) Mündlich.

1. Der 200. Teil von 400 (800, 1200, 3600, 80000) ist?
2. Der 2000. Teil von 4000 (12000, 18000, 30000) ist?

b) Schriftlich.

326 | 2282000 m = ?

4. Übung: Das Teilen mehrfach benannter Größen dezimaler Währung.

a) Mündlich.

Der 2. Teil von 720 M 40 ₰ (320 hl 70 l).
„ 30. „ „ 31 Ztr. 20 Pfd. (121 m 50 cm).

b) Schriftlich.

203 | 529850 M 30 ₰.

5. Übung: Angewandtes Teilen. (Schlußrechnung.)

a) Mündlich.

20 Stücke kosten 412 M 20 ₰, ? kostet 1 Stück.

b) Schriftlich.

325 Kisten wiegen 4134 Ztr. 75 Pfd., ? 1 Kiste.

---

7. Stufe: Wiederholung an mehrsortigen nicht dezimalen Größen (Stück und Dtz., Jahr, Monate, Wochen und Tage 2c.)

1. Übung: Addieren von Stück und Dtz. 2c.
2. Übung: Subtrahieren dieser Größen.
3. Übung: Multiplizieren.
4. Übung: Enthaltensein.
5. Übung: Eigentliches Teilen.

Das vierte Schuljahr.

Übersicht.

1. Semester.

Gegenstand: Das Teilen und das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Veranschaulichungsmittel: Das Teillineal.

Objekt der Berechnung: Die Einheit, das Kontinuum, versinnbildlicht durch Linien, welche der Schüler mittelst des Teillineals selbst auf seiner Tafel zieht.

Lehrgang.

Erster Gegenstand: Das Teilen.

1. Stufe: Das Teilen der Einheit.
2. Stufe: Das Teilen ganzer Zahlen.

Zweiter Gegenstand: Die gemeine Bruchrechnung.

1. Stufe: Das Teilen, resp. das Resolvieren und Reduzieren der Brüche.
2. Stufe: Das Addieren der Brüche.
3. Stufe: Das Subtrahieren derselben.
4. Stufe: Das Multiplizieren.
5. Stufe: Das Enthaltensein und fortgesetzte Subtrahieren.

2. Semester.

Gegenstand: Das Rechnen mit Dezimalbrüchen. — Gesellschafts-, Durchschnitts- und Mischungsrechnung.

Veranschaulichungsmittel bei der Einführung in die Dezimalbruchrechnung: Der Meterstab.

Objekt der Berechnung: Die dezimalen Maße und Gewichte.

Lehrgang.

Erster Gegenstand: Die Dezimalbruchrechnung.

1. Stufe: Lesen und Schreiben der Dezimalbrüche. Das Meter und seine Teile, die dezimalen Hohlmaße, Gewichte 2c.
2. Stufe: Addieren der Dezimalbrüche.
3. Stufe: Subtrahieren.
4. Stufe: Multiplizieren.
5. Stufe: Dividieren im Sinne der fortgesetzten Subtraktion oder des Enthaltenseins.
6. Stufe: Teilen der Dezimalbrüche.
7. Stufe: Aufgaben mit gemeinen und Dezimalbrüchen. — Umwandeln der einen Bruchart in die andere.

Zweiter Gegenstand: Die Gesellschaftsrechnung.

Dritter Gegenstand: Die Durchschnittsrechnung.

Vierter Gegenstand: Die Mischungsrechnung.

Erstes Semester.

Erster Gegenstand: Das eigentliche Teilen.

1. Stufe: Das Teilen der Einheit.

1. Übung: Entstehen der Teile; Benennen derselben; Übung im Anschreiben der Nenner.

Lehrer: „Nehmt euer Teillineal! Legt den weißen Rand auf! Macht auf eure Tafel eine Linie so lang als das Lineal ist und teilt sie sodann durch einen kurzen senkrechten Strich in zwei gleiche Stücke! Zeichnet darunter eine zweite Linie und zerschneidet dieselbe in vier gleiche Teile! Macht noch zwei Linien und zerstückt die eine in acht, die andere in sechzehn Teile! — Wie viele Teile habt ihr aus der ersten Linie gemacht?" – Schüler: „2 Teile." — Lehrer: „Wie nennt man solche 2 Teile gewöhnlich?" — Schüler: „Halbe." — Lehrer: „Das Ganze hat wie viel Halbe? — Wir wollen die Benennung Halbe in Ziffern anschreiben. Seht an die Wandtafel! Zuerst mache ich einen kurzen schiefen Strich. Dieser Strich zeigt an, daß geteilt wurde. Unter denselben schreibe ich sodann einen Zweier. Die Ziffer 2 sagt mir, daß das Ganze in 2 Teile geteilt oder mit einem anderen Ausdrucke, daß gehälftet oder halbiert worden ist. Was deutet der schräge Strich an? — Was der Zweier? — Wie schreibt man Halbe? — Schreibt an das Ende der obersten Linie Halbe, nämlich $/_2$!"

Auf gleiche Weise wird die Teilung der zweiten, dritten und vierten Linie besprochen und das Schreiben der Nenner $/_4$, $/_8$, $/_{16}$ geübt. Dann wird von der Zeichnung abgelesen und einzeln und im Chor gesprochen: „Wenn ich das Ganze in zwei gleiche Teile teile, so erhalte ich Halbe; wenn ich das Ganze in vier gleiche Teile teile, so erhalte ich Viertel" u. s. f.

Lehrer: „Legt den blauen Rand des Teillineals auf! Zeichnet vier Linien! Teilt die erste in 3, die zweite in 6, die dritte in 12, die letzte in 24 gleiche Teile! Wie heißt man die Teile der ersten Linie? — Wie wird man die der zweiten, dritten, vierten Linie nennen? — Wie schreibt man Drittel?" — Schüler: „Schiefen Strich, darunter 3." — Lehrer: „Was deutet hier der schräge Strich an? — Was die Ziffer 3? — Schreibt an das Ende der ersten Linie $/_3$! — Wie schreibt man Sechstel?" u. s. w.

Lehrer: „Legt nun auch den gelben Rand eures Lineals auf! Zeichnet drei Linien und zerstückt die eine in 3, die andere in 9, die letzte endlich in 18 Teile!" (Behandlung wie oben.)

Lehrer: „Legt schließlich den roten Rand auf! Ziehet wieder drei Linien! Teilt sie in 5, in 10 und 20 Teile!" (Ebenfalls wie oben.)

Nun wird das Schreiben aller möglichen Nenner geübt. Die Anschauung fällt dabei selbstverständlich weg. — Der Lehrer fragt: „Was entsteht, wenn ich ein Ganzes in 7, in 11, in 15, in 73, in 100, in 1000 2c. Stücke zerteile?“ — Schüler: „/7, /11, /15, 2c.“ — Lehrer: „Wie schreibt man /7?“ — Schüler: „Schiefen Strich, darunter 7.“ — Lehrer: „Schreibt in Ziffern /7, /21, /39 2c.!“

2. Übung: Das Zählen der Teile; Unterscheidung zwischen Zähler und Nenner.

Lehrer: „Zeichnet dreizehn Linien! — Die erste teilt ihr mir mittelst des Teillineals in 2, die zweite in 3, die dritte in 4, die vierte in 5 ..... die letzte in 24 gleiche Stücke! — Das Ganze hat wie viele Halbe?“ — Schüler: „2 Halbe.“ — Lehrer: „Schreibt an das Ende der ersten Linie: $1 = {}^2/_2$! — Das Ganze hat wie viele Drittel? — Schreibt an das Ende der zweiten Linie: $1 = {}^3/_3$!“ u. s. w.

Darauf wird wieder von der Tafel abgelesen und einzeln und im Chor memoriert: „Ein Ganzes hat 2 Halbe; ein Ganzes hat 3 Drittel“ 2c.

Ist dies geschehen, so werden die Begriffe „Zähler“ und „Nenner“ entwickelt. Der Lehrer fragt zunächst: „Wie schreibt man 2 Halbe? 3 Drittel?“ 2c. — Schüler: „2 Halbe schreibt man: schiefen Strich, darunter 2, darüber ebenfalls 2!“ — Lehrer: „Was zeigt der Zweier unter dem Striche an?“ — Schüler: „Daß das Ganze in 2 Stücke oder in Halbe geteilt wurde.“ — Lehrer: „Gut! Der Zweier unter dem Strich sagt also, welche Art von Teilen wir vor uns haben, er gibt den Teilen einen Namen, er benennt sie, wir wollen darum diese Ziffer den Nenner heißen. Wie heißen wir den Zweier unter dem schrägen Strich? — Warum? — Was deutet aber der Zweier über dem schiefen Strich an?“ — Schüler: „Daß zwei Teile vorhanden sind.“ — Lehrer: „Richtig! Dieser Zweier gibt also die Zahl der Teile an, er zählt sie. Wie werden wir ihn deshalb nennen? Wer will es erraten? — Jeder Bruch hat Zähler und Nenner. Wo steht der Nenner?“ — Schüler: „Unter dem schrägen Strich.“ — Lehrer: „Wo der Zähler?“ — Schüler: „Über demselben.“ — Lehrer: „Gebt Zähler und Nenner an von ${}^3/_3$, ${}^4/_4$!“ 2c.

Zum Schluß fragt der Lehrer wiederum nach allen möglichen Teilen: „Ein Ganzes hat wie viele /53, /64, /132 2c.?“ oder auch: „In wie viele /53, /64, /132 läßt sich ein Ganzes teilen?“ — Dann: „Wie schreibt man ${}^{53}/_{53}$, ${}^{64}/_{64}$?“ 2c.

3. Übung: Das Zusammenfassen der Teile zum Ganzen.

Lehrer: „Zeichnet neuerdings 13 Linien! — Teilt die erste in 2, die zweite in 3 ..... die unterste in 24 Teile! — In was habt ihr die erste Linie geteilt?“ — Schüler: „In Halbe.“ — Lehrer: „Wenn ich die zwei Hälften an einander füge, was erhalte ich dadurch wieder?“

— Schüler: „Ein Ganzes." — Lehrer: „Hebt die Teilung auf oder mit einem anderen Ausdrucke, macht aus den zwei Halben wieder ein Ganzes, indem ihr das Strichlein zwischen den zwei Teilen auslöscht und schreibt an das Ende der Linie: $^2/_2 = 1$!"

Lehrer: „In was habt ihr die zweite Linie geteilt?" — Schüler: „In Drittel." — Lehrer: „Macht aus den Dritteln ebenfalls ein Ganzes, indem ihr die Strichlein zwischen den Teilen weglöscht und schreibt an das Ende der Linie: $^3/_3 = 1$!"

Auf diese Weise werden sämtliche Teilungen aufgehoben, so daß der Schüler am Schluß der Übung nur ungeteilte Linien (Ganze) auf der Tafel hat. — Zuletzt fragt der Lehrer wieder nach den verschiedensten Brüchen, also z. B.: „Wie viele $/_7$, $/_{13}$, $/_{65}$ sind zu einem Ganzen erforderlich?"

4. Übung: Das Teilen der Einheit mit Reduktion auf einen Teil.

Lehrer: „Macht auf eure Tafel 13 Linien und teilt die erste wieder in 2, die zweite in 3 ..... die letzte in 24 Teile! — Wir wollen von jeder Linie nur einen Teil und zwar den letzten behalten und alle übrigen ablöschen. Also! Behaltet von der ersten Linie den zweiten Teil und wischt den anderen weg! Was bleibt?" — Schüler: „$^1/_2$." — Lehrer: „Der zweite Teil von 1 ist sonach? — Wie wird $^1/_2$ geschrieben? — Schreibt an das Ende eures Stückes: $^1/_2$!"

Lehrer: „Behaltet von der zweiten Linie den dritten Teil und löscht die beiden anderen ab! Was bleibt übrig? — Der dritte Teil von 1 ist? — Schreibt an das Ende der Linie: $^1/_3$!" u. s. f.

An der Zeichnung von der Schülertafel wird darauf geübt:

1. Das Benennen der einfachen Teile. — „Das ist $^1/_2$; das ist $^1/_3$ 2c." oder auch: „Der zweite Teil von 1 ist $^1/_2$; der dritte Teil von 1 ist $^1/_3$." 2c. — Zwischenfragen. Lehrer: „Warum nennst du diesen Teil ein Halbes?" — Schüler: „Weil das Ganze in zwei solche Teile geteilt wurde." — Lehrer: „Warum jenen ein Drittel?" — Schüler: „Weil das Ganze drei solche Teile hat."

2. Das Erklären der Teile. — Schüler: „$^1/_2$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in zwei gleiche Teile zerschneide und davon einen behalte. $^1/_3$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in drei gleiche Teile zertrenne und davon nur einen behalte" 2c.

Zum Schlusse wieder alle möglichen Teile. Lehrer: „Was ist der 7. Teil von 1? — Wie viel beträgt der 13., der 51., der 100. Teil von 1? — Wie entsteht $^1/_{17}$, $^1/_{25}$, $^1/_{96}$? — Wie schreibt man $^1/_{11}$, $^1/_{37}$, $^1/_{64}$? — Was ist mehr $^1/_3$ oder $^1/_4$, $^1/_7$ oder $^1/_6$, $^1/_{13}$ oder $^1/_{15}$, $^1/_{32}$ oder $^1/_{27}$?"

5. Übung: Das Teilen der Einheit mit Reduktion auf beliebig viele Teile.

Lehrer: „Zeichnet mit dem Teillineal 13 Linien! — Teilt die erste in 2, die zweite in 3 Stücke u. s. f.!“ — Geschieht. — Lehrer: „Deutet mir auf den ersten Teil der obersten Linie! — Wenn ich diesen Teil herausnehme, was habe ich dann? — Schreibt an das Ende des obersten Teiles: $^1/_2$! — Zeigt auf das andere Stück der ersten Linie! Wie viel sind die beiden Teile zusammen? Schreibt an das Ende derselben: $^2/_2 = 1$!“

Lehrer: „Zeigt auf den ersten Teil der zweiten Linie! Was ist dieser Teil?“ — Schüler: „$^1/_3$.“ — Lehrer: „Schreibt an das Ende des ersten Stückes: $^1/_3$! — Zeigt auf den 2. Teil! Was ist dieser Teil?“ — Schüler: „Ebenfalls $^1/_3$!“ — Lehrer: „Wie viel sind aber der erste und zweite Teil zusammen?“ — Schüler: „$^2/_3$.“ — Lehrer: „Zeigt auf den dritten Teil! Wie viel sind die 3 Teile zusammen?“ — Schüler: „$^3/_3$ oder ein Ganzes.“ — Lehrer: „Schreibt $^3/_3 = 1$!“ u. s. f.

Unser Schüler erhält dadurch folgende Darstellung oder Zeichnung:

| $^1/_2$			$^2/_2 = 1$
| $^1/_3$	| $^2/_3$		$^3/_3 = 1$
| $^1/_4$	| $^2/_4$	| $^3/_4$	$^4/_4 = 1$
u. s. f.	u. s. f.		

Wertvolle Übungen, die sich mit dem Ablesen dieser Teile von der Schülertafel verbinden lassen, sind:

1. Das Benennen und Zusammenfassen der Bruchstücke.

a) Der Schüler deutet auf die oberste Linie und spricht: „Das sind Halbe!“ — auf die zweite Linie: „Das sind Drittel!“ u. s. f.

b) Er fährt mit dem Finger über den ersten Teil der Linie: „Das ist ein Halbes.“ — Er streicht über die ganze Linie: „Das sind 2 Halbe oder ein Ganzes.“ Dann zeigt er auf den ersten Teil der zweiten Linie: „Das ist 1 Drittel.“ Er streicht quer über den ersten und zweiten Teil derselben: „Das sind 2 Drittel“, er fährt über die ganze Linie: „Das sind 3 Drittel oder ein Ganzes“ u. s. w.

2. Das Entstehen derselben. — Schüler: „$^1/_2$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in 2 gleiche Teile teile und davon einen behalte; $^2/_2$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in 2 Teile zerschneide und behalte. $^1/_3$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in 3 Teile zerstücke und davon einen behalte; $^2/_3$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in 3 Teile zertrenne und davon 2 behalte,“ u. s. w.

3. Das Erklären der Ziffern.

a) Zunächst wird gelesen: „$^1/_2$, $^2/_2$ oder ein Ganzes; $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_3$ oder ein Ganzes; $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^4/_4$ oder ein Ganzes“ u. s. w.

b) Dann wird eine Bruchzahl nach der anderen aufgelöst in Bruchstrich, Nenner und Zähler, z. B.:

„$^1/_2$! Der schräge Strich deutet an, daß ein Ganzes geteilt wurde; der Nenner 2 sagt, daß es in zwei gleiche Teile oder in Hälften zerschnitten wurde; der Zähler 1 gibt zu erkennen, daß nur 1 Teil, nämlich 1 Hälfte vorhanden ist. — $^2/_2$! Der schiefe Strich zeigt an, daß ein Ganzes geteilt wurde; der Nenner 2 sagt, daß es in 2 Teile geteilt wurde; der Zähler 2 gibt zu erkennen, daß 2 Teile, d. i. 2 Hälften oder das Ganze vorhanden sind," u. s. f.

Zuletzt kommen wieder Fragen nach allen möglichen gebrochenen Größen u. zwar 1. Fragen nach der Anzahl der Teile: „$^3/_7$ sind wie viele Teile?" — Antwort: „$^3/_7$ sind 3 Teile, von welchen jeder ein Siebentel ist." 2. Fragen nach der Entstehung der Teile: „Wie entstehen $^6/_{19}$?" — Antwort: „$^6/_{19}$ entstehen, wenn man ein Ganzes in 19 Teile zerschneidet und davon 6 behält." 3. Fragen nach der Schreibung derselben: „Wie schreibt man $^{11}/_{15}$?" — Antwort: „$^{11}/_{15}$ schreibt man: schiefen Strich, darunter 15, darüber 11."

---

2. Stufe: Das Teilen ganzer Zahlen.

1. Übung: Das Teilen ganzer Zahlen durch Zerstücken der einzelnen Einheiten (Umwandeln der Ganzen in Halbe, Drittel u. s. w., sowie umgekehrt der Halben, Drittel 2c. in ganze Zahlen).

Lehrer: „Nehmt euer Teillineal! Legt den weißen Rand auf! Ziehet 6 Linien und teilt eine jede in 2 Teile oder Halbe! — Ein Ganzes hat wie viele Halbe? Schreibt an das Ende der Linie: 1 = $^2/_2$! — Zwei ganze Linien haben zusammengenommen wie viele Halbe?" — Schüler: „2 mal 2 Halbe oder 4 Halbe." — Lehrer: „Schreibt an das Ende der zweiten Linie: 2 = $^4/_2$!" u. s. f.

Dann wird von der Tafel abgelesen: „1 Ganzes hat 2 Halbe; 2 Ganze haben 2 mal 2 oder 4 Halbe; 3 Ganze haben 3 mal 2 oder 6 Halbe," u. s. f.

Der Lehrer läßt darauf noch eine Anzahl Linien in 3, in 4 und 5 Teile zerstücken und diese Teile wiederum in der eben beschriebenen Weise von der Tafel absagen. Das Teilen in 6 und mehr Stücke dagegen wird frei im Kopf und ohne Veranschaulichung geübt. Der Lehrer verlangt etwa: „Ihr müßt mir jetzt der Reihe nach angeben, wie viele Sechstel 1, 2, 3, 4 .... Ganze haben!" — Erster Schüler: „Ein Ganzes hat 6 Sechstel." — Zweiter Schüler: „2 Ganze haben 2 mal 6 oder 12 Sechstel." — Dritter Schüler: „3 Ganze haben 3 mal 6 oder 18 Sechstel," u. s. f. —

Das Umwandeln der Halben, Drittel 2c. in ganze Zahlen. — Lehrer: „Macht neuerdings 6 Linien und halbiert sie! — Zeigt auf

die oberste Linie und spricht: 1 Ganzes hat 2 Halbe; dann auf die erste und zweite: 2 Ganze haben 4 Halbe u. s. w.!" — Geschieht. Lehrer: „Wir wollen die Halben wieder in Ganze verwandeln! Zeigt auf die oberste Linie! Das sind wie viele Halbe? — 2 Halbe zusammengenommen wie viele Ganze? — Macht aus der geteilten Linie wieder eine ungeteilte, indem ihr das Stricheldhen zwischen den zwei Teilen auslöscht und schreibt an das Ende unserer Linie: $^2/_2 = 1$! — Zeigt jetzt auf die zweite Linie! Dieselbe hat mit der ersten zusammengenommen wie viele Halbe? — Hebt auch die Teilung dieser Linie auf und sagt mir, in wie viele Ganze ihr nun die 4 Halben verwandelt habt! — Schreibt an das Ende der zweiten Linie: $^4/_2 = 2$!" u. s. f.

Dann wird von der Tafel abgelesen: „2 Halbe geben 1 Ganzes, 4 Halbe geben 2 Ganze, 6 Halbe geben 3 Ganze," u. s. w.

Hierauf kann man, wenn man es für notwendig halten soll, noch eine Anzahl Linien mittelst des Teillineals in Drittel, Viertel und Fünftel zerstücken und hernach die geteilten Linien wieder in ungeteilte umformen. Das Umwandeln der Sechstel, Achtel 2c. dagegen muß frei im Kopfe geschehen. Der Lehrer verlangt: „Gebt mir der Reihe nach an, wie viel Ganze sich aus $^6/_6$, $^{12}/_6$, $^{18}/_6$ 2c. bilden lassen?" — Erster Schüler: „6 Sechstel sind ein Ganzes." — Zweiter Schüler: „12 Sechstel sind wie viele Ganze? — 6 Sechstel sind ein Ganzes; so oft ich 6 Sechstel von 12 Sechstel wegnehmen kann, so viele Ganze bekomme ich; 6 von 12 geht 2 mal also sind 12 Sechstel = 2 Ganze." — Dritter Schüler: „18 Sechstel sind wie viele Ganze? — 6 Sechstel sind ein Ganzes" u. s. w.

2. Übung: Das Teilen ganzer Zahlen durch Ordnen in Reihen oder Häufchen.

Von dieser Art des Teilens, das wir zur Unterscheidung vom eigentlichen Teilen (thatsächlichen Zerstücken) das Verteilen nennen wollen, haben wir zwar schon in den ersten 3 Schuljahren gehandelt, wir müssen es aber auf dieser Stufe nochmals durchnehmen und zwar diesmal in Verbindung mit der Bruchform. Ließen wir seither sprechen: „Der zweite Teil von 48 ist 24; der dritte Teil von 90 ist 30" 2c., so werden wir nunmehr unserem Schüler auch sagen lassen: „Die Hälfte von 48 ist 24; das Drittel von 90 ist 30" 2c.

Lehrer: „Legt mir die Schreibseite eurer Schiefertafeln auf! Zeigt mir die erste Zeile! die zweite! — In diese zwei Zeilen wollen wir 10 kurze senkrechte Striche so verteilen, daß immer einer in die erste und ein anderer in die zweite Zeile kommt! Führt das aus und zählt dabei laut!" — Es geschieht. — Lehrer: „In wie viele Teile habt ihr die 10 geteilt?" — Schüler: „In zwei Teile." — Lehrer: „Wie

werden wir diese Teile nennen?" — Schüler: „Halbe." — Lehrer: „Die Hälfte von 10 ist?" —

3. Übung: Das Teilen ganzer Zahlen mit nachfolgender Reduktion auf einen Teil.

1. Durch Zerstücken der Einheiten mittelst des Teillineals. — Lehrer: „Legt den weißen Rand eures Lineals auf! — Macht drei Linien und halbiert sie! — Löscht dann von jeder eine Hälfte ab! Wie viel bleibt?" — Schüler: „3 Halbe." — Lehrer: „3 Halbe sind wie viele Ganze?" — Schüler: „$1^1/_2$." — Lehrer: „Berechne jetzt die Hälfte von 3 im Kopf!" — Schüler: „Die Hälfte von 3! Die Hälfte von 1 ist $^1/_2$; die Hälfte von 3 ist 3 mal $^1/_2$ d. i. $^3/_2$ oder $1^1/_2$." — Lehrer: „Berechne nun auch die Hälfte von 7 (von 15, von 36 2c.) im Kopf!"

Lehrer: „Blauen Rand auf! Ziehet 5 Linien und teilt eine jede in 3 Teile! Behaltet von jeder der 5 Linien den dritten Teil oder das Drittel und löscht die anderen Teile ab! — Wie viel bleibt?" — Schüler: „5 Drittel." — Lehrer: „$^1/_3$ von 5 ist also? — Das sind wie viele Ganze? — Berechne dasselbe im Kopf!" — Schüler: „$^1/_3$ von 5! $^1/_3$ von 1 ist $^1/_3$; $^1/_3$ von 5 ist 5 mal so viel, also $^5/_3$ oder $1^2/_3$." — Lehrer: „Berechnet im Kopf $^1/_3$ von 11, von 25!" 2c.

Wenn eine hinreichende Menge von Aufgaben mündlich gelöst worden ist, läßt der Lehrer die Regel abstrahieren: So viele Eins der Dividend enthält, so viele einfache Teile kommen auf den Quotienten. Beispiel: $^1/_2$ von 8! $^1/_2$ von 1 ist $^1/_2$; so viele Eins so viele Halbe; darum ist $^1/_2$ von 8 achtmal $^1/_2$, d. i. $^8/_2$ oder 4 Ganze."

2. Durch Verteilen auf Reihen. — Lehrer: „Verteilt 12 kurze senkrechte Striche auf zwei Reihen (Zeilen)! — Behaltet davon einen Teil und löscht den andern ab! Was bleibt? — Die Hälfte von 12 ist also? — Wir wollen unsere Aufgabe jetzt auch im Kopf rechnen! Die 12 Striche sollen auf zwei Reihen gleichheitlich verteilt und ein Teil soll davon behalten werden. So oft es 2 Striche sind, so oft kommt 1 auf den einen Teil. 2 ist in 12 sechsmal enthalten. Darum ist auch die Hälfte von 12 sechsmal 1 oder 6. — Rechne auf diese Weise im Kopf: $^1/_2$ von 18! von 24! von 30!" 2c.

Lehrer: „Verteilt 15 auf 3 Reihen! Von je wie viel Strichen kommt immer einer auf einen Teil?" — Schüler: „Von je 3 Strichen." — Lehrer: „Das Drittel von 15 wird wie oftmal 1 betragen?" — Schüler: „So oftmal 1, als 3 in 15 enthalten ist." — Lehrer: „3 ist aber in 15 wie oftmal?" — Schüler: „5 mal." — Lehrer: „Sonach ist das Drittel von 15?" — Schüler: „5 mal 1 oder 5." — Lehrer: „Wir wollen sehen ob unsere Lösung richtig ist. Ihr habt auf euerer Tafel 15 Striche in drei Reihen gebracht. Behaltet von den drei Reihen nur eine und löscht die beiden übrigen ab! Was

bleibt?“ — Schüler: „5 Striche.“ — Lehrer: „$^1/_3$ von 15 ist demnach?“

Zuletzt wird wieder folgende Regel abgezogen: „Man besinnt sich vor allem auf jene Zahl, welche 1 ergibt, sobald sie auf die verlangte Weise geteilt wird und schließt dann: so oftmal sich diese Zahl von der ganzen zu teilenden wegnehmen läßt, so oftmal 1 kommt auf einen Teil, z. B. $^1/_2$ von 8! $^1/_2$ von 2 ist 1. So oftmal 2, so viele 1. 2 ist in 8 viermal, darum ist auch die Hälfte von 8 viermal 1 oder 4.“

Es sind sonach zwei verschiedene Regeln, welche beim Teilen ganzer Zahlen befolgt werden können. Die eine leitet sich aus dem Zerstücken der einzelnen Einheiten (d. i. aus dem wirklichen Teilen) ab und wird unserem Schüler verständlich gemacht durch Manipulieren mit dem Teillineal; die andere beruht auf dem bloßen Verteilen in Reihen und kann am besten durch Gruppieren (Verteilen) von Strichen verdeutlicht werden.

3. Durch Verteilen auf Reihen und gleichzeitiges Zerstücken einer Einheit. — Lehrer: „Verteilt auf euerer Tafel 21 Striche in zwei Zeilen!“ — Die Schüler überzeugen sich, daß sich nur 20 Striche ohne Zerschneiden der Einheit in zwei Reihen ordnen lassen und daß 1 als Rest bleibt. — Lehrer: „Ihr müßt auch die übrig bleibende Einheit auf die beiden Zeilen verteilen. Wie kann das geschehen?“ — Schüler: „Indem wir die Einheit zerstücken und auf jede der zwei Zeilen nur eine Hälfte bringen.“ — Lehrer: „Zeichnet auf die obere Reihe ein halbes Strichelchen! — auf die untere ebenfalls! — Welche Zahl habt ihr im Ganzen verteilt? — Auf wie viele Teile? — Behaltet davon einen und löscht den anderen ab! — Was bleibt?“ — Schüler: „$10^1/_2$.“ — Lehrer: „Die Hälfte von 21 ist also? — Rechne die nämliche Aufgabe frei im Kopf!“ — Schüler: „$^1/_2$ von 21! $^1/_2$ von 20 und $^1/_2$ von 1; $^1/_2$ von 20 ist 10; $^1/_2$ von 1 ist $^1/_2$; $^1/_2$ von 21 ist darum $10^1/_2$.“

4. Übung: Das Teilen ganzer Zahlen mit nachfolgender Reduktion auf mehrere Teile.

a) Mündliche Lösung. — Lehrer: „Nehmt das Teillineal! Macht zwei Linien und teilt eine jede in 3 Stücke! Behaltet von jedem Ganzen 2 Teile d. i. 2 Drittel und löscht das andere Drittel ab! — Wie viele Drittel der ganzen Zahl (d. i. 2) habt ihr nun auf euerer Tafel?“ — Schüler: „Zwei Drittel von 2.“ — Lehrer: „Zeigt mir jetzt ein Drittel von 2 und deckt das andere Drittel mit der Hand zu! Ein Drittel von zwei ist wie viel?“ — Schüler: „$^2/_3$.“ — Lehrer: „Deckt auf! Zeigt mir die zwei Drittel von 2! — Zwei Drittel von 2 sind wie oftmal $^2/_3$?“ — Schüler: „Zweimal $^2/_3$.“ — Lehrer: „Zweimal $^2/_3$ sind?“ — Schüler: „$^4/_3$ oder $1^1/_3$.“ — Lehrer: „Wir wollen dasselbe auch im Kopf ausrechnen. Ich werde es euch vor-

machen. — $^2/_3$ von 2! Zuerst berechne ich ein Drittel von 2 und dann erst zwei Drittel. $^1/_3$ von 2 ist $^2/_3$; 2 mal $^2/_3$ sind $^4/_3$ oder $1^1/_3$; sonach sind $^2/_3$ von 2 = $1^1/_3$. — Berechnet nun auch $^2/_3$ von 12! — von 13! — von 15! — von 20!" 2c.

Lehrer: „Zeichnet drei Linien! — Teilt eine jede in 4 Teile! — Behaltet davon je 3 Teile oder $^3/_4$ vom Ganzen! — Zeigt mir dann auf euerer Tafel ein Viertel von 3 und deckt die beiden anderen Viertel mit der Hand zu! Ein Viertel von 3 Ganzen ist wie viel?" — Schüler: „$^1/_4$ von 3 ist $^3/_4$." — Lehrer: „Deckt auf! Drei Viertel von 3 sind wie oftmal $^3/_4$?" — Schüler: „Dreimal $^3/_4$." — Lehrer: „Dreimal $^3/_4$ sind?" — Schüler: „$^9/_4$ oder $2^1/_4$." — Lehrer: „Berechne $^3/_4$ von 3 frei im Kopf! — Was mußt du zuerst ausrechnen?" — Schüler: „Ein Viertel von 3" u. s. f.

b) Schriftliche Lösung. — Wir lassen zunächst die Aufgabe schreiben, wie sie gegeben ist, also etwa

$$^2/_3 \text{ von } 752.$$

Dann befehlen wir dem Schüler: „Mache unter die Aufgabe einen wagrechten Strich und gib an, was zuerst zu berechnen ist!" — Schüler: „Zuerst muß ich berechnen, wie viel ein Drittel von 752 beträgt." — Lehrer: „Schreibe unter den wagrechten Strich

$$3 \mid 752 =$$

d. h. der 3. Teil von 752 ist wie viel, und rechne es aus!" — Geschieht. — Lehrer: „Was hast du soeben gerechnet?" — Schüler: „Wie viel ein Drittel von 752 ist." — Lehrer: „Was wirst du jetzt thun?" — Schüler: „Jetzt werde ich noch mit 2 vermehren." — Lehrer: „Weshalb?" — Schüler: „Weil ich zwei Drittel von 752 berechnen soll." — Lehrer: „Multipliziere mit 2 und unterstreiche das letzte Ergebnis."

Die schriftliche Lösung unseres Beispiels erhält somit folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} ^2/_3 \text{ von } 752 \\ \hline 3 \mid 752 = 250^2/_3 \\ \times 2 \\ \hline \underline{501^1/_3} \end{array}$$

Zweiter Gegenstand: Die gemeine Bruchrechnung.

1. Stufe: Das Teilen, resp. das Resolvieren, Reduzieren und Gleichnamigmachen der Brüche.

Vorübung: Unterscheidung zwischen Anzahl und Größe der Teile.

1. Von der Größe der Teile oder vom Nenner. — Lehrer: „Die Teile, in welche ein Ganzes zerstückt ist, können verschieden groß

sein. Nennt mir einen verhältnismäßig großen Teil?“ — Schüler: „$^1/_2$, $^1/_3$.“ — Lehrer: „Nennt mir einen kleinen Teil!“ — Schüler: „$^1/_{16}$, $^1/_{20}$, $^1/_{36}$.“ — Lehrer: „Wer weiß noch viel kleinere Teile? — Wann erhalten wir große Teile?“ — Schüler: „Wenn wir das Ganze nur in wenig Teile zerstücken.“ — Lehrer: „Wann bekommen wir kleine Teile?“ — Schüler: „Wenn wir das Ganze in viele Stücke zerschneiden.“ — Lehrer: „Was gibt der Nenner an? Erkläre es mir an einigen Beispielen!“ — Schüler: „Er gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde; der Nenner $/_2$ z. B. sagt, daß das Ganze in zwei Teile, der Nenner $/_3$, daß es in 3, der Nenner $/_4$, daß es in vier Stücke zerschnitten wurde.“ — Lehrer: „Der Nenner gibt aber nicht bloß die Anzahl der Teile, welche aus dem Ganzen gemacht wurden, er gibt auch die Größe derselben an. Er bringt sonach ein Zweifaches zum Ausdruck: 1) in wie viele Teile das Ganze zerstückt wurde, 2) wie groß sie sind. Nun müßt ihr merken: je kleiner die Nennerziffer ist, in desto weniger Teile wurde das Ganze zerstückt und desto größer sind darum auch die einzelnen Teile; je größer dagegen die Nennerziffer ist, in desto mehr Teile wurde das Ganze geteilt und desto kleiner müssen dieselben selbstverständlich sein. Die kleine Nennerzahl z. B. $/_2$, $/_3$, $/_4$ ꝛc. steht also für große und die große Nennerzahl, z. B. $/_{365}$, $/_{1000}$ ꝛc. steht für kleine Teile. — Erklärt mir die Nenner $/_2$ und $/_{72}$! $/_3$ und $/_{145}$!“ ꝛc. — Schüler: „Der Nenner $/_2$ sagt, daß das Ganze nur in zwei Teile geteilt wurde und daß darum die Teile groß sind. Der Nenner $/_{72}$ drückt aus, daß das Ganze in viele Teile zerstückt wurde und daß daher dieselben klein sein müssen.“

2. Von der Anzahl der Teile oder vom Zähler. — Lehrer: „Nehmt das Teillineal! Legt den weißen Rand auf! Zeichnet $^3/_4$! — Dann $^3/_8$! — Zuletzt eine $^3/_{16}$ Linie! — Deutet auf die $/_4$! Wie viel sind es? — Zeigt auf die $/_8$ und $/_{16}$ und sagt, wie viel es sind! — Der Zähler gibt nur die Anzahl der vorhandenen Teile an, er sagt uns aber nichts von der Größe derselben. Ein und der nämliche Zähler kann für sehr große, aber auch für sehr kleine Teile stehen, so der Zähler $^3/$ für $/_4$, $/_8$, $/_{16}$, $/_{100}$, $/_{1000}$ ꝛc. — Erklärt mir nun die Zähler $^{12}/$, $^{27}/$, $^{63}/$, $^{54}/$!“ — Schüler: „Der Zähler $^{12}/$ gibt an, daß 12 Teile vorhanden sind; er läßt uns aber im Ungewissen über die Art und Größe derselben. Es können 12 Halbe, Drittel, Viertel ꝛc., aber auch 12 Hundertstel, Tausendstel, ꝛc. sein.“

3. Vom Zähler und Nenner oder von der vollständigen Bezeichnung einer Bruchgröße. — Lehrer: „Weder der Zähler für sich, noch der Nenner geben mir einen Bruch genau an. Zum vollständigen Ausdruck einer gebrochenen Größe gehören sonach Zähler und Nenner. — Was gibt der Zähler an? — Was der Nenner? — Was beide vereinigt? — Erkläre mir den Bruch $^3/_4$!“ — Schüler: „$^3/_4$! Der

Nenner /4 sagt mir, daß das Ganze nur in 4 Teile geteilt wurde, daß die Teile also verhältnismäßig groß sind; der Zähler 3/ sagt, daß die Anzahl der vorhandenen Teile 3 beträgt."

Auf diese Weise wird dem Schüler die eigentümliche Funktion des Zählers und Nenners zum klarsten Bewußtsein gebracht.

1. Übung: Das Umwandeln der Brucheinheiten in kleinere oder das Resolvieren.

1. Das Zerstücken der Teile. — Lehrer: „Legt den weißen Rand des Teillineals auf! Macht eine Linie! Teilt sie in 2 Teile! — Wie nennt man einen solchen Teil? — Wir können die Halben wieder in zwei Stücke zerschneiden. Was bekommen wir dann? — Teilt die Halben in Viertel! — Wie viele Viertel haben wir erhalten?" — Schüler: „4 Viertel." — Lehrer: „Was hat zugenommen?" — Schüler: „Die Anzahl der Teile. Statt 2 Teile habe ich jetzt 4." — Lehrer: „Was hat abgenommen?" — Schüler: „Die Größe der einzelnen Teile. Statt /2 habe ich nun /4." — Lehrer: „Teilt jedes Viertel wieder in zwei Teile! — Was erhaltet ihr dadurch?" — Schüler: „8/8." — Lehrer: „Was nimmt also durch das Halbieren der Viertel zu?" — Schüler: „Die Anzahl der Teile." — Lehrer: „Was nimmt ab?" — Schüler: „Die Größe der Teile. Statt /4 bekomme ich /8." — Lehrer: „Teilt jedes /8 wieder in zwei Stücke! — Was habt ihr erhalten? — Was hat zu- und was hat abgenommen? — Ihr seht daraus, durch das Teilen der Teile wird die Anzahl der Stücke vermehrt, aber zugleich deren Größe vermindert."

2. Das Benennen der Teile, welche durch fortgesetztes Zerstücken entstehen.

a) Die Teile des Halben. — Lehrer: „Was erhalte ich, wenn ich ein Ganzes in 2 Teile teile?" — Schüler: „2/2." — Lehrer: „Um wie viel ist das Ganze mehr als das Halbe?" — Schüler: „Ein Ganzes ist 2 mal so viel als ein Halbes." — Lehrer: „Wenn ich ein Halbes in 2, 3, 4, 5, 6 .... Teile zerstücke, wie viele Teile macht dies beim Ganzen?" — Schüler: „Wenn ich 1/2 in 2 Teile zerschneide, so macht dies beim Ganzen 2 mal 2 oder 4 Teile; wenn ich 1/2 in 3 Teile zertrenne, so macht dies beim Ganzen 2 mal 3 oder 6 Teile" 2c. — Lehrer: „Welche Art von Teilen erhalte ich, wenn ich 1/2 in 2, 3, 4, 5 ... Teile zerstücke?" — Schüler: „Wenn ich 1/2 in 2 Teile zerstücke, so macht dies beim Ganzen 2 mal 2 oder 4 Teile und jeden solchen Teil nenne ich Viertel, ich erhalte sonach Viertel; wenn ich 1/2 in 3 Teile zerschneide, so macht dies beim Ganzen 2 mal 3 oder 6 Teile und jeden solchen Teil nenne ich Sechstel" u. s. f.

b) Die Teile des Drittels. — Lehrer: „Ein Ganzes ist 3 mal so viel als ein Drittel. Wenn ich ein Drittel in 2, 3, 4, 5 ..... Teile trenne, wie viele Teile würde dies beim Ganzen machen und

welche Benennungen werde ich darum diesen neuen Teilen geben?" — Schüler: „Wenn ich $1/3$ in 2 Teile teile, so macht dies beim Ganzen 3 mal 2 oder 6 Teile, und jeden solchen Teil nenne ich Sechstel; wenn ich $1/3$ in 3 Teile zertrenne, so würde dies beim Ganzen 3 mal 3 oder 9 Teile machen, und jeden solchen Teil nenne ich Neuntel" u. s. w.

c) Die Teile des Viertels, Fünftels, Sechstels, Achtels, Neuntels und Zehntels. — Lehrer: „$1/4$, ($1/5$, $1/6$, $1/8$, $1/9$, $1/10$) ist der wievielte Teil des Ganzen? — Ein Ganzes ist wie oftmal so viel als $1/4$ ($1/5$, $1/6$, $1/8$, $1/9$, $1/10$)? — Wenn ich nun $1/4$ in 2 (3, 4, 5, 6...) Teile trenne, wie viele Teile würde dies beim Ganzen machen und wie werde ich sie benennen?" — Schüler: „Wenn ich $1/4$ in 2 Teile schneide, so würde dies beim Ganzen 4 mal 2 oder 8 Teile machen und jeden solchen Teil nenne ich Achtel; wenn ich $1/4$ in 3 Stücke teile, so macht dies beim Ganzen 4 mal 3 oder 12 Stücke und jeden solchen Teil nenne ich Zwölftel" u. s. f. — Lehrer: „Wenn ich $1/5$ in 2 (3, 4, 5, 6 ꝛc.) Stücke trenne, wie viele Teile würde dies wieder beim Ganzen machen und welche Namen müßte ich ihnen geben?" u. s. w.

d) Die Teile, welche durch Zerstücken der verschiedensten beliebigen Brucheinheiten entstehen. — Lehrer: „Wenn wir $1/15$ in 2 (3, 6, 4, 7 ꝛc.) Stücke zerschneiden, wie viele Teile würde das beim Ganzen machen und wie müßten wir dieselben benennen?" u. s. w.

3. Das Umwandeln der Brüche in kleinere Teile oder das Resolvieren.

a) Das Umwandeln der Bruch e i n h e i t e n. — Lehrer: „Zeichnet mittelst des Teillineals 3 halbe Linien auf die Tafel und teilt mir die erste in 2, die zweite in 4, die letzte in 8 Stücke! — Welche Art von Teilen erhalte ich, wenn ich $1/2$ in 2 Teile zerschneide? — Schreibt an das Ende der ersten halben Linie: $1/2 = 2/4$! — Was bekomme ich, wenn ich ein Halbes in 4 Teile zerstücke? — Schreibt: $1/2 = 4/8$! — Und was, wenn ich $1/2$ in 8 Stücke teile? — Schreibt: $1/2 = 8/16$! — Ich will euch nun auch zeigen, wie man $1/2$ in $/36$, $/48$, $/72$ ꝛc. durch Rechnung leicht und schnell umwandeln kann. — $1/2$ sind wie viele $/36$? Ein Ganzes hat $36/36$; $1/2$ hat nur die Hälfte von $36/36$, d. i. $18/36$; $1/2 = 18/36$."

Lehrer: „Zieht auf euerer Tafel 4 Drittelslinien! Teilt die erste in 2, die zweite in 3, die dritte in 4, die unterste in 8 gleiche Stücke! — Zeigt dann auf die oberste Linie! $1/3$ hat wie viele $/6$? — Schreibt an das Ende euerer Linie: $1/3 = 2/6$! — Deutet auf die zweite Drittelslinie! $1/3$ hat wie viele $/9$! — Schreibt wieder an das Ende derselben: $1/3 = 3/9$!" u. s. f. „Wir wollen nun auch das Umwandeln des Drittels durch Rechnung versuchen. Also: $1/3$ sind wie viele $/36$?

Ein Ganzes hat $^{36}/_{36}$; $^{1}/_{3}$ hat nur den dritten Teil von $^{36}/_{36}$ oder $^{12}/_{36}$; $^{1}/_{3} = {}^{12}/_{36}$."

u. s. w. u. s. w.

b) Das Umwandeln der Bruchzahlen. — Lehrer: „$^{2}/_{3}$ sind wie viele $/_{6}$, $/_{9}$, $/_{12}$?" — Schüler: „$^{2}/_{3}$ sind wie viele $/_{6}$? Ein Ganzes hat $^{6}/_{6}$; $^{1}/_{3}$ hat den dritten Teil von $^{6}/_{6}$, d. i. $^{2}/_{6}$; $^{2}/_{3}$ haben 2mal $^{2}/_{6}$ oder $^{4}/_{6}$; sonach sind $^{2}/_{3} = {}^{4}/_{6}$. — $^{2}/_{3}$ sind wie viele $/_{9}$? Ein Ganzes hat $^{9}/_{9}$" u. s. f. Lehrer: „$^{3}/_{4}$ sind wie viele $/_{8}$, $/_{12}$, $/_{16}$, $/_{40}$?" — Schüler: „$^{3}/_{4}$ sind wie viele $/_{8}$? Ein Ganzes hat $^{8}/_{8}$; $^{1}/_{4}$ hat den vierten Teil von $^{8}/_{8}$, d. i. $^{2}/_{8}$, und $^{3}/_{4}$ haben 3mal $^{2}/_{8}$ oder $^{6}/_{8}$; sonach sind $^{3}/_{4} = {}^{6}/_{8}$."

u. s. w. u. s. w.

2. **Übung**: Das Zusammenfassen gleicher Teile zu größeren Teilen oder das Reduzieren der Brüche.

a) Das Zusammenfassen von je zwei Teilen zu einem einzigen. — Lehrer: „Nehmt das Teillineal! Legt den weißen Rand auf! Ziehet eine Linie und teilt sie in 16 gleiche Stücke! — Welche Art von Teilen haben wir auf diese Weise erhalten? — Nehmt jetzt immer zwei solche Teile (Sechzehntel) zusammen und macht daraus einen Teil, indem ihr das Strichelchen zwischen ihnen auslöscht! — Habt ihr noch dieselbe Anzahl von Teilen wie vorhin?" — Schüler: „Nein, nur mehr die Hälfte davon. Statt 16 Teilen haben wir jetzt bloß 8." — Lehrer: „Sind die gegenwärtigen Teile noch genau so groß wie die vorigen?" — Schüler: „Nein, ihre Größe hat sich verdoppelt. An Stelle der $/_{16}$ habe ich $/_{8}$ erhalten." — Lehrer: „Wie viele $/_{8}$ habt ihr auf euerer Zeichnung? — Nehmt wieder je zwei Teile zusammen und macht daraus einen einzigen, indem ihr das Strichelchen zwischen denselben wegputzt! — Welche Art von Teilen habt ihr nun bekommen? — Verwandelt nun auch die $/_{4}$ in $/_{2}$! — Wie viel Halbe erhaltet ihr aus den $^{4}/_{4}$? — Um wie viel ist das Halbe größer als das Viertel? — Aus dem allen läßt sich für das rechnerische Zusammenfassen (Reduzieren) zweier Teile folgende Regel abstrahieren: W e n n m a n j e z w e i T e i l e z u e i n e m e i n z i g e n v e r e i n i g t, s o b r i n g t m a n d a d u r c h d i e A n z a h l d e r u r s p r ü n g l i c h e n T e i l e a u f d i e H ä l f t e, m a n h a t d e s h a l b d e n Z ä h l e r d e s B r u c h e s z u h a l b i e r e n; z u g l e i c h a b e r v e r d o p p e l t m a n d i e G r ö ß e d e r e i n z e l n e n T e i l e, d i e $/_{16}$ m a c h t m a n a l s o d a d u r c h z u $/_{8}$, d i e $/_{8}$ z u $/_{4}$, d i e $/_{4}$ z u $/_{2}$; m a n m u ß a u s d i e s e m G r u n d e a u c h d e n N e n n e r m i t 2 t e i l e n. — Z ä h l e r u n d N e n n e r e i n e s B r u c h e s d u r c h 2 d i v i d i e r e n o d e r k ü r z e n, h e i ß t a u s j e 2 T e i l e n e i n e n m a c h e n. — Wandelt jetzt $^{64}/_{132}$ in größere Teile um, dadurch, daß ihr fortgesetzt je 2 Teile zu einem einzigen verbindet und erklärt mir dabei euer Verfahren möglichst umständlich!" —

Schüler: „Wenn ich von 64 Teilen je 2 mit einander vereinige, so erhalte ich dadurch die halbe Anzahl, also nur 32, aber dafür doppelt so große Stücke, also /66 statt /132. Wenn ich nun von den 32 Teilen wieder zwei zu einem einzigen zusammenfasse, so bekomme ich" u. s. f.

b) Das Zusammenfassen von je drei Teilen zu einem. — Lehrer: „Legt den gelben Rand des Teillineals auf! Macht eine Linie und teilt sie in 9 Teile! — Vereinigt dann je 3 Teile zu einem, indem ihr die Strichelchen zwischen ihnen auslöscht! Habt ihr noch dieselbe Anzahl von Teilen wie vorhin?" — Schüler: „Nein! Statt 9 Teile haben wir nur mehr 3." — Lehrer: „Wie verhält es sich mit der Größe der einzelnen Teile?" — Schüler: „Dieselbe hat sich verdreifacht. Aus /9 sind /3 geworden." — Lehrer: „Was geschieht also, wenn ihr je 3 Teile zu einem einzigen zusammenfaßt?" — Schüler: „Wir erhalten dadurch nur ein Drittel der bisherigen Anzahl (statt 9 Stücke blos 3), aber dafür dreimal so große Teile (/3 statt /9)." — Lehrer: „Macht aus 81/162 fortgesetzt größere Stücke, indem ihr immer je drei Teile zu einem vereinigt!" — Schüler: „Wenn ich von 81 Teilen je drei zu einem einzigen zusammenfasse, so erhalte ich ein Drittel der bisherigen Anzahl, also statt 81 Teilen nur 27; aber die Größe derselben wird dadurch zugleich verdreifacht, statt /162 bekommen wir /54. Wenn ich von den 27/54 wieder je drei zusammenfasse, so" u. s. f. — Lehrer: „Löset mir dieselbe Aufgabe schriftlich, indem ihr Zähler und Nenner des Bruches fortgesetzt durch drei dividiert."

c) Das Zusammenfassen von 4, 5, 6 .... Teilen zu einem. — Lehrer: „Was erhalte ich, wenn ich Zähler und Nenner eines Bruches durch 4 teile?" — Schüler: „Das Viertel der bisherigen Anzahl, aber dafür 4mal so große Teile." — Lehrer: „Was bekomme ich, wenn ich Zähler und Nenner eines Bruches mit 5, 6, 7 .... dividiere?" — Schüler: „Dividiere ich Zähler und Nenner durch 5, so erhalte ich das Fünftel der bisherigen Anzahl, aber dafür 5mal so große Teile; teile ich Zähler und Nenner mit 6, so" u. s. f. — Lehrer: „Wandelt mir 16/24 in 4mal so große Teile um! Was müßt ihr nun thun?" — Schüler: „Wir müssen Zähler und Nenner durch 4 teilen." — Lehrer: „Was hat zu geschehen, wenn aus 15/75 5mal so große Teile gemacht werden sollen?"

u. s. w. u. s. w.

Zum Schluß hat der Lehrer noch folgende für das Bruchrechnen wichtige Thatsachen zu entwickeln, resp. aufzufrischen:

1) Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn ich Zähler und Nenner durch ein und dieselbe Zahl multipliziere oder dividiere.

2) Multipliziere ich Zähler und Nenner mit 2, so erhalte ich die doppelte Anzahl, aber dafür halb so große Teile.

3) Dividiere ich Zähler und Nenner durch 2, so bekomme ich dadurch die halbe Anzahl, aber dafür doppelt so große Teile.

3. Übung: Das Gleichnamigmachen der Brüche.

1. Fall: Die kleineren Nenner gehen in einem größeren auf.

a) Lösung durch Zeichnung. — Lehrer: „Machet gleichnamig, d. h. drückt durch einerlei Art von Teilen aus: $^1/_3$ und $^1/_6$! Wie heißt der erste Bruch? — Zeichnet eine Drittelslinie! — Wie heißt der zweite Bruch? — Macht eine Sechstelslinie! — Wie fange ich es nun an, um gleich große Teile zu erhalten?" — Schüler: „Ich muß das Drittel in Sechstel umwandeln." — Lehrer: „Führt dies aus! — Was habt ihr gethan?" — Schüler: „Wir haben aus dem Drittel 2 Sechstel gemacht." — Lehrer: „Wie sind aber die Nenner der beiden Brüche: $^2/_6$ und $^1/_6$?" — Schüler: „Gleichnamig."

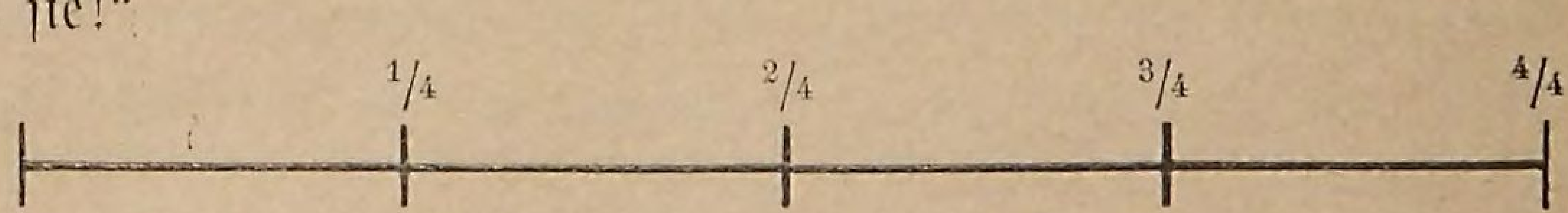
Lehrer: „Macht gleichnamig $^1/_3$ und $^1/_9$!" — Die Schüler zeichnen eine Drittels- und eine Neuntelslinie unter einander und zerstücken dann die erstere in 3 Teile (Neuntel). — Lehrer: „$^1/_3$ sind also wie viel $/_9$?"

Lehrer: „Macht gleichnamig: $^4/_5$ und $^3/_{10}$! — In was müßt ihr die $^4/_5$ umwandeln? — $^1/_5$ sind wie viele $/_{10}$? — $^4/_5$ wie viele $/_{10}$?"

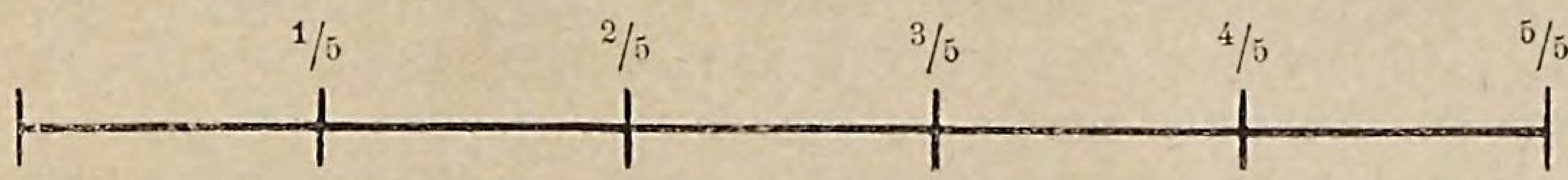
Lehrer: „Wir wollen folgende vier Brüche auf gleiche Benennung bringen: $^1/_2$, $^3/_4$, $^7/_8$ und $^5/_{16}$. Legt darum den weißen Rand des Teillineals auf und zeichnet zuerst eine halbe Linie, dann eine Dreiviertelslinie u. s. f.! — Was muß bei dem Gleichnamigmachen mit den größeren Bruchteilen geschehen?" — Schüler: „Sie müssen in kleinere zerstückt werden." — Lehrer: „Welches sind hier die kleinsten Teile?" — Schüler: „$/_{16}$." — Lehrer: „In was werdet ihr also $^1/_2$, $^3/_4$ und $^7/_8$ umwandeln müssen?" — Schüler: „In $/_{16}$." — Lehrer: „Thut das! $^1/_2$ sind wie viele $/_{16}$? — Wie viele $/_{16}$ kann man aus $^1/_4$ machen? — aus $^3/_4$? — $^1/_8$? — $^7/_8$?"

b) Lösung durch Rechnung. — Lehrer: „Macht gleichnamig $^{13}/_{15}$ und $^{29}/_{30}$! In was müßt ihr die $/_{15}$ verwandeln? — $^1/_{15}$ wie viele $/_{30}$? — $^{13}/_{15}$ wie viele $/_{30}$? — Bringt unter gleiche Benennung $^3/_4$, $^5/_8$ und $^9/_{16}$! Welches sind hier die kleinsten Teile? — Wie viele $/_{16}$ kann man aus $^1/_4$ machen? — aus $^3/_4$? — aus $^1/_8$? — aus $^5/_8$?"

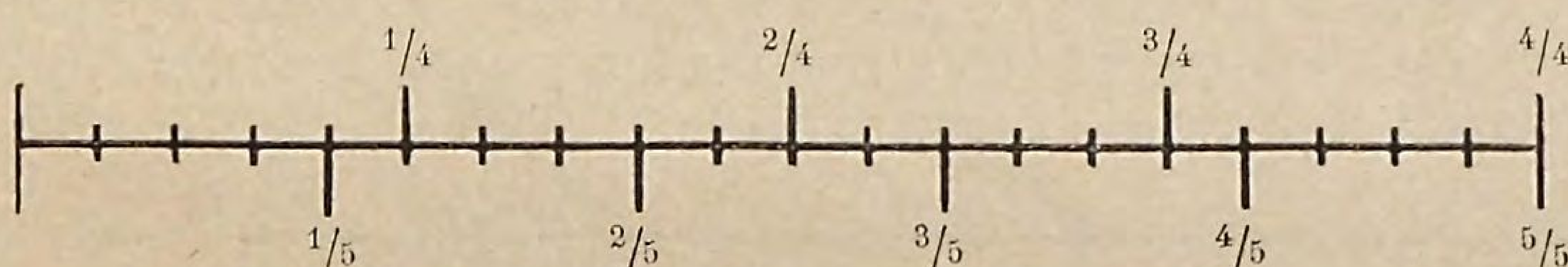
2. Fall: Die kleineren Nenner gehen nicht in einem größeren auf und sind nicht verwandte Zahlen. — Lehrer: „Wir wollen $/_4$ und $/_5$ gleichnamig machen. Wie ist bei den $/_4$ das Ganze geteilt?" — Schüler: „In 4 Teile." — Lehrer: „Zeichnet eine Linie und teilt sie!"



Lehrer: „Wie ist das Ganze bei den Fünfteln geteilt?“ — Schüler: „In 5 Teile.“ — Lehrer: „Zerstückt eine zweite Linie in Fünftel!“



Lehrer: „Können wir die /4 durch Zusammensetzen der /5 oder die /5 durch Zusammensetzen der /4 entstehen lassen? — Weil wir aber /4 und /5 gleichnamig machen wollen, was müssen wir mit ihnen anfangen?“ — Schüler: „Wir müssen sie in noch kleinere Stücke zerlegen.“ — Lehrer: „Ich könnte nun die beiden Ganzen in eine beliebige Anzahl kleinerer Teile zerschneiden, aber da es gerade Viertel und Fünftel sind, welche ich gleichnamig machen soll, so werde ich jeden Teil (d. i. jedes Viertel) der ersten Linie in fünf Teile, somit das Ganze in 4 mal 5 oder 20 Teile, jeden Teil der zweiten Linie in vier Teile, sonach das Ganze in 5 mal 4, d. h. ebenfalls 20 Teile teilen und erhalte auf diese Weise in beiden Fällen /20, somit gleiche Benennung. Können wir aber aus den /20 wirklich /4 sowohl als /5 zusammensetzen? Wir wollen sehen! — Zeichnet eine dritte Linie! Teilt sie in /20! — Nach obenhin wollen wir die /20 zu /4, nach untenhin zu /5 zusammenfassen.“



Daraus ergibt sich folgende Regel für das Gleichnamigmachen: Wenn zwei Brüche, deren Nennerziffern nicht ineinander aufgehen und auch keine verwandten Zahlen sind, Beispiel: /4 und /5, gleichnamig gemacht werden sollen, so besinnt man sich zunächst darauf, in wie viele Teile das Ganze beim ersten Bruch und in wie viele es beim zweiten geteilt ist und teilt dann

1. jeden Teil des ersten Bruches in ebenso viele Stücke, als das andere Ganze geteilt ist, also in unserem Beispiel jedes Viertel in 5 Teile oder /20;

2. jeden Teil des zweiten Bruches dagegen in so viele Stücke, als das erste Ganze geteilt ist, somit jedes Fünftel in 4 Teile, also ebenfalls in /20. Auf solche Weise erhalte ich für beide Bruchgrößen völlig gleiche Teile.

Schließlich kann man diese Regel mehr mechanisieren, indem man dem Schüler bemerken und einprägen läßt, daß man die Nennerziffern (/4, /5) nur mit einander zu multiplizieren braucht, um ihr gemeinschaftliches Maß (/20) zu erhalten.

Die Aufgaben, welche in unserer Übung vom Schüler gelöst werden müssen, sind zweierlei:

1. Aufgaben im bloßen Suchen des gemeinschaftlichen Nenners, z. B.: In welcher Art von Teilen treffen zusammen $/_4$ und $/_5$; $/_6$ und $/_7$; $/_{12}$ und $/_{19}$; $/_3$, $/_4$ und $/_5$; $/_5$, $/_6$ und $/_7$?

2. Aufgaben im Gleichnamigmachen vollständiger Bruchzahlen, z. B.: Machet gleichnamig $^1/_4$ und $^3/_5$; $^2/_3$ und $^4/_7$; $^1/_3$, $^3/_4$ und $^2/_7$; $^2/_5$, $^5/_6$ und $^3/_{11}$!

3. Fall: Die kleineren Nenner gehen nicht in einem der gegebenen größeren Nenner auf, sind aber verwandte Zahlen. — Lehrer: „Es sollen $/_4$ und $/_6$ gleichnamig gemacht werden. Zeichnet darum zwei Linien und teilt die erste in 4, die zweite in 6 Teile! — Ich könnte nun jedes $/_4$ des ersten Ganzen in 6 und jedes $/_6$ des zweiten Ganzen in 4 kleinere Stücke zerschneiden und würde dadurch das einemal 4×6, das anderemal 6×4, in beiden Fällen aber 24 Teile oder $/_{24}$ bekommen. Da jedoch 6 und 4 verwandte Zahlen sind, d. h. einen Faktor, nämlich 2, mit einander gemein haben, so treffen unsere beiden Nenner schon in irgend welchen größeren Teilen zusammen, es ist also nicht notwendig, daß wir die beiden Ganzen in je 24 Teile zerstücken. — Zeigt auf euere erste Linie! In wie viele Teile habt ihr sie geteilt?“ — Schüler: „In 4 Teile.“ — Lehrer: „Das sind wie oftmal 2 Teile?“ — Schüler: „2 mal 2 Teile.“ — Lehrer: „Verbindet je 2 Viertel durch eine Klammer und schreibt an das Ende der Linie: 4 Teile = 2 mal 2 Teile!“



Lehrer: „In wie viele Teile habt ihr die zweite Linie zerstückt?“ — Schüler: „In 6 Teile.“ — Lehrer: „6 Teile sind wie oftmal 3 Teile?“ — Schüler: „2 mal 3 Teile.“ — Lehrer: „Verbindet je 3 Teile der zweiten Linie durch eine Klammer und schreibt an das Ende: 6 Teile = 2 mal 3 Teile.“



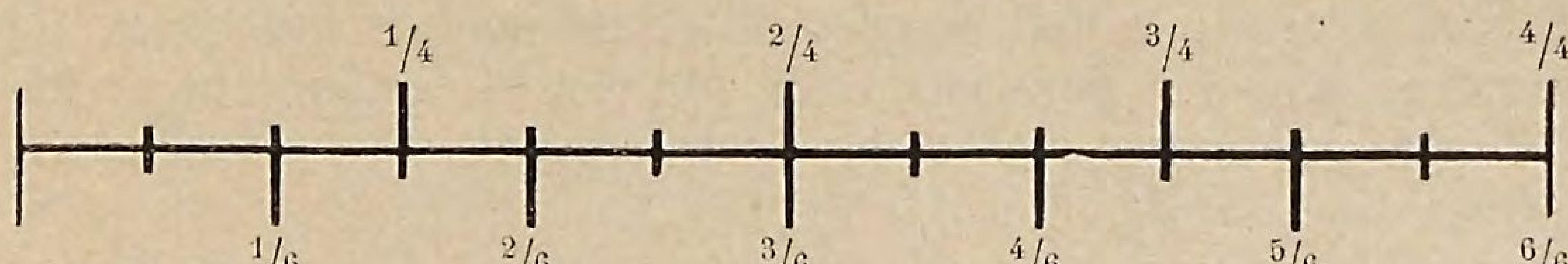
Lehrer: „Seht, die 2 mal 2 Teile der ersten Linie sind zusammen ebenso groß als die 2 mal 3 Teile der zweiten. Wenn aber dies richtig ist, so folgt daraus von selbst, daß auch 1 mal 2 Teile des ersten Ganzen genau so viel ausmachen müssen, wie 1 mal 3 Teile der zweiten Einheit. Nachdem nun 2 Viertel (d. i. 2 Teile der oberen Linie) so groß sind wie 3 Sechstel (d. i. 3 Teile der unteren Linie), so folgt daraus weiter:

1. Es ist nicht notwendig, daß ich jedes Viertel des ersten Ganzen in *zweimal* 3 oder 6 kleinere Teile zerstücke; es genügt, wenn ich *einmal* 3 Teile daraus mache; das gibt beim Ganzen 12 Teile oder /12.

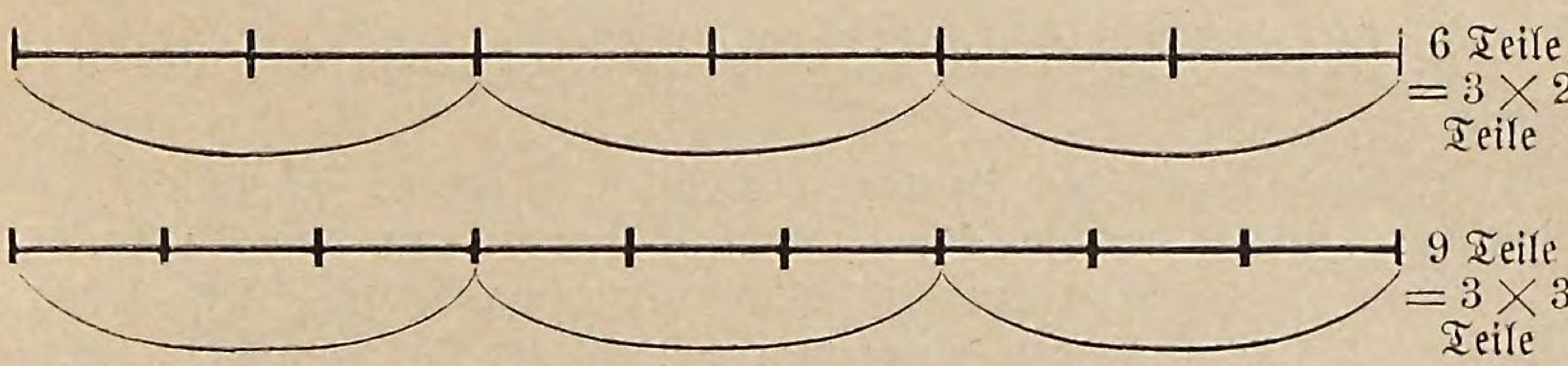
2. Es ist auch nicht erforderlich, daß ich jedes Sechstel des zweiten Ganzen in *zweimal* 2 oder 4 Stücke zerschneide; es reicht hin, wenn ich es in *einmal* 2 Teile zerlege; das macht beim Ganzen 6 mal 2 oder 12 Teile; sonach erhalte ich hier ebenfalls /12.

Viertel und Sechstel treffen zusammen in Zwölftel.

Zeichnet jetzt eine dritte Linie! — Teilt sie in /12 und faßt sie nach obenhin in /4, nach untenhin in /6 zusammen!"



Lehrer: „In welcher Art von Teilen treffen /6 und /9 zusammen? — Zieht wieder zwei Linien auf euerer Tafel und teilt die erste in 6, die zweite in 9 gleiche Stücke! — 6 Teile sind wie oftmal 2 Teile? — 9 Teile sind wie oftmal 3? — Verbindet jetzt das einemal je 2, das anderemal je 3 Teile in euerer Zeichnung durch einen Bogen und schreibt an das Ende der ersten Linie: 6 Teile = 3 mal 2 Teile, an das Ende der zweiten aber: 9 Teile = 3 mal 3 Teile!"



Lehrer: „Ihr seht, die 3 mal 2 Teile der ersten Linie sind genau so groß, wie die 3 mal 3 Teile der zweiten, darum müssen auch 1 mal 2 Teile der einen gleich sein 1 mal 3 Teilen der anderen. Daraus folgt aber wieder:

1. daß es nicht notwendig ist, jedes Sechstel des ersten Ganzen in *dreimal* 3 oder 9 kleinere Stücke zu zerschneiden, daß es vielmehr schon genügt, wenn man *einmal* 3 Teile daraus macht, was dann beim Ganzen 6 mal 3 oder 18 Teile gibt,

2. daß es ebenfalls überflüssig ist, jedes Neuntel des zweiten Ganzen in *dreimal* 2 oder 6 Teile zu zertrennen, daß es vielmehr schon hinreicht, wenn man *einmal* 2 Stücke daraus bildet, was dann beim Ganzen 9 mal 2, somit wiederum 18 Teile macht.

Aus 18 Teilen des Ganzen oder $/_{18}$ lassen sich sowohl $/_6$ als $/_9$ zusammensetzen! Wie viele $/_{18}$ treffen auf $^1/_6$? — wie viele auf $^1/_9$? — Zeichnet eine Linie, teilt sie in $/_{18}$ und faßt dieselben nach obenhin in $/_6$, nach untenhin in $/_9$ zusammen!

Suchet den gemeinschaftlichen Nenner zu den Brüchen: $^3/_8$ und $^5/_{12}$; $^7/_{20}$ und $^4/_{15}$; $^3/_4$, $^5/_6$ und $^9/_{10}$!"

4. Übung: Das Teilen der Brüche mit Reduktion auf nur einen Teil.

1. Das Teilen der Brucheinheit. — Aufgabe: $^1/_4$ von $^1/_8$. — Lösung: „Wenn ich ein Achtel in 4 kleinere Teile zerstücke, so würde dies beim Ganzen 8 mal 4 oder 32 Teile machen und jeden solchen Teil nenne ich $/_{32}$. Und wenn ich von den 4 Teilen, in welche ich das Achtel zerschnitten habe, nur einen behalte, so bekomme ich als Ergebnis $^1/_{32}$. — $^1/_4$ von $^1/_8$ ist $^1/_{32}$."

2. Das Teilen der Bruchzahl. — Aufgabe: $^1/_4$ von $^3/_7$. — Lösung: „Wenn ich das $/_7$ in 4 kleinere Stücke zerlege, so würde dies beim Ganzen 7 mal 4 oder 28 Teile machen und jeden solchen Teil nenne ich $/_{28}$. $^1/_4$ von $^1/_7$ ist $^1/_{28}$; und $^1/_4$ von $^3/_7$ ist darum $^3/_{28}$."

3. Das Teilen der gemischten Zahl. — Aufgabe: $^1/_4$ von $1^2/_5$. — Lösung: „$1^2/_5$ sind $^7/_5$. Wenn ich jedes $/_5$ in 4 Stücke teile, so macht das beim Ganzen 5 mal 4 oder 20 Teile und jeden solchen Teil nenne ich $/_{20}$. $^1/_4$ von $^1/_5$ ist daher $^1/_{20}$, und $^1/_4$ von $^7/_5$ sind $^7/_{20}$."

5. Übung: Das Teilen der Brüche mit Reduktion auf mehrere Teile.

1. Das Teilen der Brucheinheit. — Aufgabe: $^3/_4$ von $^1/_2$. — Lösung: „Zuerst berechne ich $^1/_4$ von $^1/_2$, und dann erst $^3/_4$ davon. — Wenn ich $^1/_2$ in 4 kleinere Stücke zertrenne, so würde dies beim Ganzen 2 mal 4 oder 8 Teile ergeben; ich erhalte sonach $/_8$. Ein Viertel von $^1/_2$ ist $^1/_8$ und drei Viertel von $^1/_2$ sind dreimal so viel, also $^3/_8$."

2. Das Teilen der Bruchzahl. — Aufgabe: $^3/_4$ von $^8/_9$. — Lösung: „$^1/_4$ von $^8/_9$ sind $^2/_9$; $^3/_4$ von $^8/_9$ sind 3 mal $^2/_9$, das sind $^6/_9$ oder $^2/_3$." — Aufgabe: $^6/_7$ von $^2/_{13}$. — Lösung: „Zuerst berechne ich ein Siebentel von $^2/_{13}$. Wenn ich aus einem Dreizehntel 7 kleinere Teile mache, so erhalte ich aus einem Ganzen 13 mal 7 oder 91 Teile und jeden solchen Teil nenne ich $^1/_{91}$. — $^1/_7$ von $^1/_{13}$ ist $^1/_{91}$ und von $^2/_{13}$ sind $^2/_{91}$ und $^6/_7$ davon sind 6 mal so viel, also $^{12}/_{91}$. — $^6/_7$ von $^2/_{13} = {}^{12}/_{91}$."

3. Das Teilen der gemischten Zahl. — Aufgabe: $^3/_4$ von $2^1/_8$. — Lösung: „$2^1/_8$ sind $^{17}/_8$. — Zuerst berechne ich ein Viertel von $^{17}/_8$ und dann erst drei Viertel. — Wenn ich jedes $/_8$ in 4 kleinere

Teile zerlege, so macht dies beim Ganzen 8 mal 4 oder 32 Teile und jeden solchen Teil heiße ich $^{1}/_{32}$. — $^{1}/_{4}$ von $^{1}/_{8}$ ist $^{1}/_{32}$, darum von $^{17}/_{8}$ = $^{17}/_{32}$. Drei Viertel sind 3 mal so viel, also 3 mal $^{17}/_{32}$ oder $^{51}/_{32}$. — $^{3}/_{4}$ von $2^{1}/_{8}$ = $^{51}/_{32}$ oder $1^{19}/_{32}$."

Für die schriftliche Lösung derartiger Aufgaben würde ich folgende Form vorschlagen:

$^{3}/_{4}$ von $2^{1}/_{8}$

4 | $^{17}/_{8}$ = $^{17}/_{32}$ (sprich: der vierte Teil von $^{17}/_{8}$ = $^{17}/_{32}$)

$\times$ 3 (sprich: $^{3}/_{4}$ von $^{17}/_{8}$ sind 3 $\times$ $^{17}/_{32}$)

$^{51}/_{32}$ = $1^{19}/_{32}$.

---

2. Stufe: Das Addieren der Brüche.

1. Übung: Das Addieren gleichnamiger Brüche.

(s. Hentschel) Übersicht.

a) $^{2}/_{9} + ^{5}/_{9}$; b) $9^{2}/_{3} + ^{1}/_{3}$; c) $4^{7}/_{8} + 2^{7}/_{8}$.

Lösung schriftlicher Aufgaben.

(s. Hentschel)

	a)		b)	
	$^{7}/_{19}$	7	$12^{3}/_{23}$	3
	$^{8}/_{19}$	8	$5^{7}/_{23}$	7
	$^{15}/_{19}$	15	6	
	$^{11}/_{19}$	11	$28^{15}/_{23}$	15
	$^{18}/_{19}$	18	100	
	$^{12}/_{19}$	12	$^{4}/_{23}$	4
	$^{10}/_{19}$	10	1	
	$4^{5}/_{19}$	$^{81}/_{19}$	$152^{6}/_{23}$	$^{29}/_{23} = 1^{6}/_{23}$

2. Übung: Das Addieren ungleichnamiger Brüche.

(s. Hentschel) Übersicht.

a) $^{2}/_{3} + ^{5}/_{6}$; b) $1^{3}/_{4} + ^{2}/_{5}$; c) $^{5}/_{8} + ^{1}/_{6}$.

Lösung schriftlicher Aufgaben.

(s. Hentschel).

	30	
$27^{1}/_{5}$	6	6
$82^{2}/_{3}$	10	20
$37^{5}/_{6}$	5	25
$147^{7}/_{10}$	$^{51}/_{30} = 1^{21}/_{30}$	

	15	
102 Schock $3^{4}/_{5}$ Mdl.	3	12
275 „ $2^{7}/_{15}$ „	1	7
378 Schock $2^{4}/_{15}$ Mdl.	$^{19}/_{15} = 1^{4}/_{15}$	

---

3. Stufe: Das Subtrahieren der Brüche.

1. Übung: Das Subtrahieren gleichnamiger Brüche.
(s. Hentschel) Übersicht.

$^3/_5 - {}^1/_5$; $4\,^3/_{11} - 1\,^2/_{11}$; $4 - {}^5/_9$; $8\,^4/_{15} - 2\,^{11}/_{15}$.

2. Übung: Das Subtrahieren ungleichnamiger Brüche.
(s. Hentschel) Übersicht.

$^4/_5 - {}^3/_{10}$; $^1/_3 - {}^1/_4$; $^3/_4 - {}^1/_6$; $12\,^1/_2 - 4\,^1/_3$.

Lösung schriftlicher Aufgaben.

(s. Hentschel).

	24	
$109\,^3/_8$	3	9
$-\ 45\,^5/_{12}$	2	10
$63\,^{23}/_{24}$		$^{23}/_{24}$

	15
45 Schock $3\,^1/_3$ Mdl.	5
— 19 „ $1\,^1/_5$ „	3
26 Schock $2\,^2/_{15}$ Mdl.	$^2/_{15}$

---

4. Stufe: Das Multiplizieren der Brüche.

Die Aufgaben auf dieser Stufe sind verhältnismäßig einfach, weil wir ja nur eine Art des Multiplizierens als berechtigt anerkennen, nämlich jene, bei welcher der Multiplikator unter der Form der ganzen Zahl dargestellt ist. Was man sonst noch als Multiplikation mit Brüchen bezeichnet hat, also alle jene Rechenexempel, in welchen der Multiplikator als Bruch oder als gemischte Zahl erscheint, (z. B. $^3/_4 \times {}^3/_8$; $1\,^1/_2 \times {}^{18}/_{53}$), haben wir dagegen der Division zugewiesen und zwar aus triftigen Gründen, welche bereits im „theoretischen Teile“ auf das ausführlichste entwickelt wurden.

1. Übung: Das Multiplizieren unbenannter Zahlen.

1. Multiplikation der Brucheinheit

a) durch Vervielfachen des Zählers.

Aufgaben: $3 \times {}^1/_7$; $25 \times {}^1/_{13}$; $70 \times {}^1/_{1415}$. — Lösung: $3 \times {}^1/_7 = {}^3/_7$. — $25 \times {}^1/_{13} = {}^{25}/_{13}$ oder $1\,^{12}/_{13}$. — $70 \times {}^1/_{1415} = {}^{70}/_{1415}$ oder $^{14}/_{283}$.

b) Durch Division des Nenners.

Aufgaben: $2 \times {}^1/_4$; $25 \times {}^1/_{400}$; $35 \times {}^1/_{700}$. — Lösung: 2 mal $^1/_4$. — Dieser Bruch ($^1/_4$) kann dadurch verdoppelt werden, daß ich an Stelle der bisherigen Brucheinheit eine nochmal so große setze. Der Wert des Nenners wird aber verzweifacht, indem ich die Nennerziffer durch 2 dividiere. 2 ist in $/_4 = /_2$ mal, also ist 2 mal $^1/_4 = {}^1/_2$. — $25 \times {}^1/_{400}$. — Wenn ich die Nennerziffer $/_{400}$ durch 25 teile, so erhalte ich einen Teil der 25 mal so groß ist, als der

bisherige. 25 ist in /400 aber /16 mal, darum ist auch 25 mal $^1/_{400}$ $= {}^1/_{16}$.

Regel: Eine Brucheinheit wird verdoppelt, indem man entweder den Zähler ($^1/$) mit 2 vermehrt, oder die Nennerziffer durch 2 teilt; sie wird verdreifacht, indem man entweder den Zähler ($^1/$) mit 3 multipliziert, also statt der einen Brucheinheit drei setzt, oder indem man den Nenner durch 3 dividiert, d. h. an Stelle der bisherigen Brucheinheit eine dreimal so große bringt u. s. w.

Diese Regel muß selbstverständlich wieder mittelst des Teillineals veranschaulicht werden. Das hiebei zu befolgende Verfahren ist indes so leicht und natürlich, daß ich es wohl nicht besonders zu beschreiben brauche.

2. Multiplikation der Bruchzahl

a) durch Vervielfachen des Zählers.

Aufgaben: $3 \times {}^5/_7$; $25 \times {}^9/_{13}$; $70 \times {}^{700}/_{1415}$. — Lösung: $3 \times {}^5/_7 = {}^{15}/_7$ oder $2\,{}^1/_7$. — $25 \times {}^9/_{13} = {}^{225}/_{13}$ oder $17\,{}^4/_{13}$. —

b) Durch Division des Nenners.

Aufgaben: $2 \times {}^3/_4$; $25 \times {}^{13}/_{200}$. — Lösung: $2 \times {}^3/_4$. Der Wert eines Bruches wird verdoppelt, wenn man die Nennerziffer durch 2 dividiert. 2 in /4 ist /2 mal enthalten, also sind $2 \times {}^3/_4$ $= {}^3/_2$ oder $1\,{}^1/_2$. — $25 \times {}^{13}/_{200}$. Der Wert eines Bruches wird 25 mal so groß, wenn man die Nennerziffer mit 25 teilt. 25 in /200 ist /8 mal, darum sind 25 mal $^{13}/_{200} = {}^{13}/_8$ oder $1\,{}^5/_8$.

c) Zum Teil durch Division des Nenners, zum andern Teil durch Multiplikation des Zählers.

Aufgabe: $6 \times {}^5/_{16}$. Lösung: Ich könnte die Aufgabe dadurch berechnen, daß ich den Zähler $^5/$ einfach mit 6 vermehre, also aus den $^5/_{16}$ $^{30}/_{16}$ mache und diese sodann in Achtel und Ganze umwandle. Bequemer aber ist die Lösung, wenn ich zuerst den Wert der einzelnen Brucheinheiten verdoppele, d. h. aus den $^5/_{16}$ $^5/_8$ bilde, und hernach den Zähler noch mit 3 multipliziere. Also: $6 \times {}^5/_{16} = 3 \times {}^5/_8 = {}^{15}/_8$ $= 1^7/_8$.

Es muß dem Schüler eingeprägt werden, daß die Multiplikation von Brüchen dadurch wesentlich gekürzt wird, wenn man, statt den Zähler mit dem Multiplikator zu vermehren, den Nenner mit dem letzteren dividiert und daß er darum nie eine Gelegenheit verpassen soll, bei welcher diese Division möglich ist.

3. Multiplikation der gemischten Zahl.

Aufgabe: $4 \times 1^2/_3$. Lösung: Diese Aufgabe läßt zwei verschiedene Berechnungen zu:

a) $4 \times 1 = 4$ und $4 \times {}^2/_3 = {}^8/_3 = 2\,{}^2/_3$; dies zu den 4 addiert, gibt $6\,{}^2/_3$.

b) $1^2/_3 = {}^5/_3$; $4 \times {}^5/_3 = {}^{20}/_3 = 6^2/_3$.

Man zerlegt also die gemischte Zahl vor der Multiplikation in die Ganzen und in den eigentlichen Bruch oder man löst die gemischte Zahl in eine einfache Bruchzahl auf. Beide Lösungsverfahren sind nach Umständen gleich praktisch, gleich empfehlenswert, und es wird darum gut sein, die Aufgaben bald nach dem einen, bald nach dem anderen berechnen zu lassen.

2. Übung: Das Multiplizieren in benannten und angewandten Aufgaben.

1. 2 × 2 Schock $2^2/_3$ Mdl.
2. 1 m kostet $^4/_5$ *M.*, ? 7 m.

---

5. Stufe: Das Enthaltensein der Brüche.

1. Übung: Unbenannte Aufgaben.

(s. Hentschel) Übersicht.

1. a) 2 in 1; b) 5 in 12; 2. a) $^2/_7$ in $^6/_7$; b) $^3/_{11}$ in 9; 3. a) $^7/_8$ in $2\,^5/_8$; b) $^3/_8$ in $1\,^1/_2$; 4. a) $4\,^1/_2$ in $31\,^1/_2$; b) $1^1/_6$ in $3^1/_2$.

2. Übung: Benannte und angewandte Aufgaben.

Zweites Semester.

Erster Gegenstand: Die Dezimalbruchrechnung.

1. Stufe: Das Meter und seine Teile. — Die dezimalen Hohlmaße, Gewichte 2c. — Lesen und Schreiben der Dezimalbrüche.

1. Übung: Das Meter und das Dezimeter. — Der Lehrer bringt einen Meterstab vor die Augen seiner Schüler und entwickelt: „Ihr seht, das Meter ist in 10 größere Stücke geteilt. Jedes solche Stück nennt man ein Zehntelsmeter oder Dezimeter. Wenn ich nun spreche, bis hieher sind es 3 (5, 7, 9, 6) Dezimeter, wie viele Zehntelsmeter sind damit gemeint? — Wer will mir am Meterstab zeigen, wie lang 2 (4, 8, 10) Dezimeter sind? — Ein Dezimeter ist welcher Teil vom ganzen Meter? — Wie kann man darum statt Dezimeter noch sagen? — Ihr müßt nun lernen, wie man die Zehntelsmeter oder Dezimeter schreibt. — Seht mir zu! $^1/_{10}$ m (dm) schreibt man: 0 Ganze, Komma, 1, m! (0,1 m) — Das Komma nach der Null deutet an, daß die Ganzen hier zu Ende sind und daß die nachfolgende Ziffer Zehntel ausdrücken soll. Der Buchstabe „m" ist die abgekürzte Bezeichnung für Meter. Ihr müßt darum den ganzen Ausdruck (0,1 m) als 1 Zehntelsmeter oder Dezimeter lesen. — 2 Zehntels-

meter schreibt man: 0, Komma, 2, m (0,2 m). — Was zeigt die Null an? — Was das Komma? — Was die Ziffer 2? — Und was der Buchstabe m? — Wie werde ich 3 Zehntelsmeter schreiben müssen?" u. s. f.

Aufgaben: 1. 3 (7, 9, 5) Dezimeter, wie viele Zehntelsmeter?

2. 2 m 3 dm (7 m 5 dm, 12 m 4 dm) sind wie viele ganze und wie viele Zehntelsmeter?

3. Schreibt in Dezimalbruchform:

a) $6\,^{7}/_{10}$ m; $12\,^{8}/_{10}$ m; $37\,^{4}/_{10}$ m.

b) 25 m 2 dm; 62 m 3 dm.

c) $^{6}/_{10}$ m; $^{3}/_{10}$ m; $^{9}/_{10}$ m.

d) 7 dm; 5 dm; 8 dm; 2 dm; 4 dm.

2. Übung: Das Meter, Dezimeter und Centimeter. — Lesen und Schreiben der Hundertstel. —

Der Lehrer zeigt den Kindern am Meterstab, daß jedes dm wieder in 10 kleinere Stücke (cm) geteilt ist und fragt dann, auf das erste dm deutend: „Wie viele cm sind bis hieher?" — Schüler: „10 cm." — Lehrer, auf das zweite dm weisend: „Und bis hieher?" — Schüler: „20 cm." — Lehrer: „Wie viele cm haben 3 (7, 5, 9, 6, 8) dm? — Wie viele cm hat aber ein m? — Das cm ist also der wievieltste Teil vom m? — Wie kann man darum statt cm noch sagen?" — Schüler: „Hundertstelmeter." — Lehrer: „2 (3, 7, 15, 49) cm sind wie viele Hundertstelmeter? — Wir wollen jetzt die Centimeter (Hundertstelmeter) in Dezimalbruchform schreiben. Seht wieder an die Wandtafel! $^{1}/_{100}$ m schreibt man: 0, Komma, 0, 1, m (0,01 m). Die erste Null zeigt an, daß keine Ganzen vorhanden sind; das Komma sagt, daß die Ganzen hier zu Ende sind; die zweite Null drückt die Abwesenheit der Zehntel aus; der 1 dagegen bezeichnet, daß ein Hundertstel vorhanden ist und das m ist die abgekürzte schriftliche Bezeichnung für Meter. — $^{2}/_{100}$ m schreibt man: 0 Ganze, Komma, 0 Zehntel, 2 Hundertstel, m (0,02 m). — Wie wird man nun $^{6}/_{100}$ m schreiben?" u. s. f.

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform: 7 cm; 1 m 9 cm; 12 m 5 cm; 4 m 8 dm 3 cm; 20 m 36 cm!

2. Lies und erkläre: 0,09 m; 25,07 m; 36,25 m!

3. Sprich folgende Brüche zuerst in der Form der Ganzen, Zehntel und Hundertstel, darauf nur als Ganze und Hundertstel: 7,12; 14,06; 325,50; 0,60; 0,09.

Das Umwandeln der dm in cm, der Zehntel in Hundertstel durch Anhängung einer Null.

Aufgaben: 1. 0,7 m; 2,3 m; 12,5 m 2c. sind wie viele ganze und /100 m? — Lösung: 0,7 m = 0,70 m; 2,3 m = 2,30 m; 12,5 m = 12,50 m.

2. 18,3; 97; 6; 45,1 *rc.* sind wie viele Ganze und Hundertstel?
3. Mache gleichnamig: 7,3 m; 12,15 m; 24,06 m; 112,9 m!
4. Desgleichen: 28,81; 0,5; 37,04; 3,8!

Das Umwandeln der cm in dm, der Hundertstel in Zehntel durch Streichung der letzten Ziffer.

Aufgabe: 1. 7,40 m; 68,50 m; 0,91 m sind wie viele ganze und /10 m? — Lösung: 7,40 m = 7,4 m; 68,50 m = 68,5 m; 0,91 m = 0,9 m.

2. 35,20; 0,89; 100,64 *rc.* wie viele Zehntel? — Lösung: 35,20 = 35,2; 0,89 = 0,9; 100,64 = 100,6.

3. Mache gleichnamig, indem du die /100 m in /10 m verwandelst: 45,3 m; 28,60 m; 75,81 m; 31,4 m!

4. Mache ebenfalls gleichnamig: 54,50; 0,2; 33,70; 46,1!

3. Übung: Das Meter, Dezimeter, Centimeter und Millimeter. — Die Tausendstel.

Es wird den Kindern gesagt, wenn möglich auch am Meterstabe gezeigt, daß jedes cm wieder in 10 kleinere Stücke (mm) geteilt ist. Darauf läßt man ihnen die Teile des Meters mit einander vergleichen: „Was ist größer, ein dm oder ein cm? — ein mm oder ein cm? — ein dm oder ein mm?" — Dem folgt das Einüben der Sätzchen: „1 m = 10 dm; 1 dm = 10 cm; 1 cm = 10 mm; 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm." -- Weiter: das Abzählen der Millimeter am Meterstab. Der Lehrer deutet auf das erste, zweite, dritte bis zehnte cm und fragt jedesmal: „Wie viele mm sind bis hieher?" — Die Schüler zählen: „10; 20; 30 . . . . 100 mm." — Der Lehrer zeigt sodann auf das zweite, dritte bis zehnte dm und fragt dabei: „Wie viele mm sind es?" — Die Schüler zählen wieder: „200; 300 . . . . 1000 mm." — Lehrer: „Das Millimeter ist also welcher Teil des Meters? — Wie könnte man darum statt Millimeter noch sagen? — Wir werden nun die Tausendstelmeter auch schreiben. Seht mir zu! $^1/_{1000}$ m schreibt man: 0 Ganze, Komma, 0 Zehntel, 0 Hundertstel, 1 Tausendstel, m (0,001 m). — $^2/_{1000}$ m schreibt man: 0 Ganze, Komma, 0 Zehntel, 0 Hundertstel, 2 Tausendstel, m (0,002 m). — Wie wird man nun $^3/_{1000}$ m schreiben?" u. s. f.

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform:

a) 6 m 3 dm 9 cm 7 mm; 27 m 8 mm *rc.*

b) $12^6/_{1000}$; $45^{48}/_{1000}$; $225^{225}/_{1000}$; $10^{175}/_{1000}$ *rc.*

2. Folgende Brüche sind auf zweierlei Weise zu lesen, nämlich das einemal als Zehntel, Hundertstel und Tausendstel, das anderemal nur als Tausendstel:

a) 45,267 m; 0,008 m *rc.*

b) 0,006; 13,204 *rc.*

Das Umwandeln der dm und cm in mm, der Zehntel und Hundertstel in Tausendstel durch Anhängung von Nullen.

Aufgaben: 1. Wandle die Hundertstel in Tausendstel um:
a) 14,25 m; 365,73 m ꝛc. b) 7,36; 0,45; 120,22 ꝛc.

2. Wandle die Zehntel in Tausendstel um:
a) 37,2 m; 106,5 m ꝛc. b) 0,3; 12,8 ꝛc.

3. Mache gleichnamig:
a) 33,7 m; 69,02 m; 0,008 m ꝛc. b) 148,003; 0,5; 16,21 ꝛc.

Das Umwandeln der mm in cm und dm, der Tausendstel in Hundertstel und Zehntel durch Streichung der letzten Ziffern.

Aufgaben: 1. Wandle die Tausendstel in Hundertstel um:
a) 3,270 m; 12,060 m; 0,900 m ꝛc. b) 0,040; 18,520 ꝛc.
2. Wandle die Tausendstel in Zehntel um:
a) 24,600 m; 0,800 m ꝛc. b) 319,500; 0,200; 47,890 ꝛc.

4. Übung: Vollständige Einführung in das dezimale Teilsystem. — Lehrer: „Wenn ich das mm wieder in 10 Stücke teilen könnte, so würde ich welche Art von Teilen erhalten?" — Schüler: „Zehntausendstel." — Lehrer: „Der zehnte Teil eines Zehntausendstel ist?" — Schüler: „Ein Hunderttausendstel." — Lehrer: „Der zehnte Teil eines Hunderttausendstel?" — Schüler: „Ein Milliontel." — Lehrer: „Der zehnte Teil eines Milliontel?" — Schüler: „Ein Zehnmilliontel." — Lehrer: „Und eines Zehnmilliontel?" — Schüler: „Ein Hundertmilliontel." — Lehrer: „Ein Ganzes hat wie viele Zehntel? — Hundertstel? — Tausendstel? — Zehntausendstel? — Hunderttausendstel? — Milliontel? — Zehnmilliontel? — Hundertmilliontel? — Schreibt 1, nämlich 1 Ganzes! — Schreibt darunter 0,1!" — Die Schüler sprechen während des Schreibens: „0 Ganze, Komma, 1 Zehntel." — Lehrer: „Schreibt darunter: 0,01!" u. s. f. — Die Kinder erhalten dadurch folgende Ziffern auf ihre Tafeln:

1
0,1
0,01
0,001
0,0001
0,00001
0,000001

An diesen Zahlen nun entwickelt der Lehrer das dezimale Teilsystem und zwar etwa auf nachstehende Weise.

Lehrer: „Zeigt auf die oberste Ziffer! Was gilt sie?" — Schüler: „Ein Ganzes." — Lehrer: „Was deutet das Komma bei den übrigen Zahlen an?" — Schüler: „Daß die Ganzen zu Ende sind und die Teile folgen." — Lehrer: „Was steht also jederzeit vor dem Komma?"

— Schüler: „Vor dem Komma stehen die Ganzen." — Lehrer: „Was hinter demselben?" — Schüler: „Die dezimalen Teile, nämlich Zehntel, Hundertstel rc." — Lehrer: „Leset nun von oben angefangen eine Zahl nach der anderen und sagt zugleich, wie man sie schreibt, indem ihr jedes Komma, jede Ziffer besonders angebt!"

Lehrer: „Was gilt die Eins, welche unmittelbar hinter dem Komma, d. i. an der ersten Dezimalstelle steht?" — Schüler: „1 Zehntel." — Lehrer: „Was gilt die Eins der zweiten Dezimalstelle?" — Schüler: „1 Hundertstel." — Lehrer: „Welchen Teil also von jener der ersten Dezimalstelle?" — Schüler: „Den zehnten Teil." — Lehrer: „Was gilt die Eins der dritten Dezimalstelle?" — Schüler: „Ein Tausendstel." — Lehrer: „Welchen Teil also von der Ziffer der zweiten Dezimalstelle?" — Schüler: „Den zehnten Teil." — Lehrer: „Was gilt die Eins der vierten Stelle?" u. s. f.

Lehrer: „Ihr seht also, der Wert der Ziffern nimmt ab, je weiter sie nach rechts geschoben werden. Auf der ersten Dezimalstelle gilt die Ziffer den zehnten Teil der Einer, auf der zweiten den zehnten Teil der Zehntel, auf der dritten den zehnten Teil der Hundertstel u. s. f. — Umgekehrt nimmt der Wert der Ziffern von rechts nach links zu. Was gilt die Eins auf der sechsten Dezimalstelle? — Was die Eins auf der fünften Stelle? — Das Wievielfache von jener auf der sechsten Stelle? — Was gilt die Eins auf der vierten Dezimalstelle? — Das Wievielfache von der Eins der fünften Dezimalstelle?" u. s. w.

Lehrer: „Wir befolgen beim Anschreiben der Dezimalbrüche dasselbe Gesetz, das wir bereits beim Schreiben ganzer Zahlen kennen gelernt haben, nämlich das Gesetz vom Stellenwert der Ziffern. Der Wert der Ziffern nimmt von rechts nach links zu, von links nach rechts fortgesetzt ab. Ausgehend von den Einern (Grundzahlen) erhalten wir, indem wir links vor die Einerziffer irgend eine andere Ziffer setzen, die Zehner, indem wir vor die Zehnerziffer wieder eine Ziffer schreiben, die Hunderter, u. s. f. — Setzen wir dagegen rechts hinter die Einer, welche wir aber durch ein Komma als Einer oder Ganze kenntlich machen müssen, eine Ziffer, so bekommen wir Zehntel, schreiben wir hinter diese eine weitere Ziffer, so erhalten wir Hundertstel und so fortgesetzt immer kleinere Teile, je weiter wir die Ziffern nach rechts hinausrücken. — Die Einer, das sind die Ziffern für die neun Grundzahlen, stehen im Mittelpunkt zweier Reihen, einer aufsteigenden und einer absteigenden. Jede derselben können wir uns in's Unendliche fortgesetzt denken. Die aufsteigende Reihe führt zu Millionen und Billionen, also zu immer größeren Ansammlungen von Einsen; die absteigende Reihe dagegen zu Milliontel und Billiontel, also zu immer kleineren Teilen der Einheit."

5. **Übung:** Die dezimale Schreibung angewandt auf *M* und *₰*, hl und l, Ztr. und Pfd., kg und g, Buch, Heft und Bogen. (Zugleich eine Wiederholung im Lesen, Schreiben und Umwandeln der Zehntel, Hundertstel und Tausendstel.)

1. Die dezimale Schreibung der *M* und *₰*. — Lehrer: „In dieser Hand hier habe ich eine Mark, in der anderen einen Pfennig. Eine Mark gilt wie viele Pfennige? — Der Pfennig ist also welcher Teil der Mark? — Wie viele /100 *M* sind 2, 3, 4 . . . 10 *₰*? — Wie viele /100 *M* sind 20, 30 . . . 90 *₰*? — Nachdem wir die *₰* als Teile der *M* betrachten können, so können wir sie auch in Bruchform anschreiben. Schreibt nun 1 *₰*, 2 *₰*, 3 *₰* . . . bis 1 *M* 50 *₰* als dezimale Teile der *M*!“ — Die Schüler schreiben: 0,01 *M*; 0,02 *M*; 0,03 *M* 2c. und sprechen dabei: „1 *₰* oder 1 Hundertstelmark schreibt man: 0 Ganze, Komma, 0 Zehntel, 1 Hundertstel, *M*! — 2 *₰* oder 2 Hundertstelmark schreibt man: 0 Ganze, Komma, 0 Zehntel, 2 Hundertstel, *M*!“ u. s. w. — Lehrer: „Leset, was ihr geschrieben habt und zwar als /100 *M* und immer gleich darauf als *₰*!“ — Schüler: „$^1/_{100}$ *M* oder 1 *₰*; $^2/_{100}$ *M* oder 2 *₰*; $^3/_{100}$ *M* oder 3 *₰*“ 2c.

2. Die dezimale Schreibung der hl und l. — Lehrer: „Dieses viereckige, blecherne Gefäß, das ich hier in der Hand habe, ist, wie ihr euch durch Messen mit dem Meterstab überzeugen könnt, genau 1 dm hoch, 1 dm breit und 1 dm tief und faßt 1 Liter oder 1 Maß. Hat das Litergefäß, das von Kaufleuten, Bräuern, Wirten 2c. zum Messen der Flüssigkeiten gebraucht wird, auch diese Form? — Worin wird aber das Litergefäß des Kaufmannes 2c. mit unserem Liter übereinstimmen?“ — Schüler: „Im Inhalt. Beide fassen gleich viel.“ — Lehrer: „Was geben 100 l?“ — Schüler: „1 hl.“ — Lehrer: „Wenn ich mir unter einem hl etwas Wirkliches und Anschauliches vorstellen will, an was werde ich denken?“ — Schüler: „An ein Faß, das genau 100 l enthält.“ — Lehrer: „Nachdem 1 hl = 100 l ist, welcher Teil des hl ist dann 1 l? — Wie kann ich darum statt l noch sagen? — 1, 2, 3 . . . 10 l sind wie viele /100 hl? — 20, 30 . . . 90 l sind wie viele /100 hl? — Wir können also die l als Teile des hl ansehen. Schreibt darum in Dezimalbruchform 1 l, 2 l, 3 l . . . bis 1 hl 50 l! — Leset das Geschriebene und gebt immer zugleich an, wie viel l es sind!“ — Die Schüler sprechen: „$^1/_{100}$ hl ist 1 l; $^2/_{100}$ hl sind 2 l; $^3/_{100}$ hl sind 3 l“ 2c.

3. Die dezimale Schreibung der kg und g. — Der Lehrer zeigt wieder das Liter und fragt: „Wie viel Wasser geht in dieses Gefäß hinein?“ — Schüler: „1 l oder 1 Maß.“ — Lehrer: „Das Wasser ist schwer, es hat ein Gewicht. Das Gewicht nun, das 1 l oder 1 Maß Wasser hat, heißt kg. Ein kg ist 2 Pfund. — Wann sagen wir, daß etwas ein kg oder 2 Pfd. schwer ist?“ — Schüler: „Wenn es

so viel wiegt, wie 1 l Wasser.“ — Lehrer: „Was ist also das kg ursprünglich und eigentlich?“ — Schüler: „Es ist die Schwere, das Gewicht eines Liters oder einer Maß Wasser.“ — Lehrer: „Was wird es aber in seiner Anwendung im geschäftlichen Verkehr?“ — Schüler: „Zur Gewichtseinheit, zum Maß für alle möglichen wägbaren Dinge.“ — Lehrer: „Die Schwere der Gegenstände ist sehr verschieden. Es gibt Körper, die viel leichter sind, als eine Maß Wasser oder 1 kg. Wie gering ist z. B. eine Feder, ein Strohhalm, ein Blatt Papier! Um nun auch solche Dinge wägen zu können, braucht man selbstverständlich sehr kleine Gewichte. Ein derartiges kleines Gewicht nun ist das Gramm. 1000 Grammgewichte erst sind so schwer wie 1 kg. Wenn ich in eine Wagschale 1 kg oder ein Zweipfundgewicht lege, wie viele Grammgewichtchen muß ich in die andere thun, damit der Wagbalken wieder in das Gleichgewicht kommt und die Zunge oben senkrecht steht?“ — Schüler: „1000 Grammgewichtchen.“ — Lehrer: „Das g ist also welcher Teil des kg? — Wie kann ich darum statt g noch sagen? — Wie viele /1000 kg sind 1, 2, 3 . . . 10 g? — 20, 30 . . . 90 g? — 200, 300 . . . 900 g? — Schreibt in Dezimalbruchform 1 g, 2 g . . . 99 g! — Schreibt ebenso 950 g bis 1 kg 50 g! — Leset jetzt, was ihr geschrieben habt und gebt zugleich immer an, wie viele g es sind!“

4. Die dezimale Schreibung der Buch, Heft und Bogen. — Der Lehrer nimmt einen Bogen Papier aus seinem Pult heraus, breitet ihn vor den Augen der Schüler aus, legt ihn wieder zusammen und erklärt: „Das ist ein Bogen. 10 solche Bogen geben ein Heft; 10 Hefte sind ein Buch. Wie viele Bogen hat also ein Heft? — Wie viel haben aber 10 Hefte oder ein Buch? — Ein Bogen ist der wievieltste Teil eines Buches? — Wir können also die einzelnen Bogen als Teile des Buches betrachten und darum in Bruchform schreiben. Schreibt und erklärt: 0,01 Buch; 0,02 Buch ꝛc.!“

6. Übung: Die Werkflächenmaße, die Feldflächenmaße, die Körpermaße, die höheren Maßeinheiten für m, kg und Buch. (Zugleich eine Übung im Lesen und Schreiben der Zehntausendstel, Hunderttausendstel ꝛc.)

1. Die Werkflächenmaße: qm, qdm, qcm, qmm. — Auf der Wandtafel ist ein qm gezeichnet. Der Lehrer mißt die Seiten desselben nochmals mit dem Meterstab ab und erläutert: „Ein Viereck, das einen Meter lang und einen Meter breit ist, nennt man Quadratmeter. Was habe ich sonach auf die Schultafel gezeichnet? — Wenn eine Tischplatte einen m lang und einen m breit ist, wie groß ist sie dann? — Welchen Platz nimmt eine Kiste ein, deren Boden 1 m lang und ebenso breit ist? — Was ist also 1 qm?“

Lehrer: „Ich werde jetzt das qm durch 9 senkrechte und 9 wagrechte Linien in kleinere Vierecke teilen. Wie breit und wie lang

wird ein jedes dieser neuen Vierecke werden; wer kann es sagen? — Wir wollen sehen, ob ihr Recht habt." — Nachdem der Lehrer die Teilung des qm in 100 qdm an der Tafel vorgenommen hat, mißt er das eine oder andere der neuen Quadrate mit dem Meterstab und fährt dann fort: „Es ist richtig, ein solches Quadrat ist genau 1 dm lang und 1 dm breit. Wie werden wir darum diese Vierecke nennen? — Schüler: „Quadratdezimeter." — Lehrer: „Wir wollen nun zählen, wie viele qdm das qm enthält! In wie viele wagrechte Reihen ist das qm geteilt? Zählt! — Wie viele qdm enthält eine wagrechte Reihe? Zählt! — Wie viele qdm sind in den 10 wagrechten Reihen, d. i. im ganzen qm eingeschlossen? — Nachdem das qm genau 100 qdm hat, so ist 1 qdm der wievieltste Teil vom qm? — Statt qdm kann man darum auch sagen Hundertstelquadratmeter."

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform: 4 qm 25 qdm; 2 qm 7 qdm! 2. Lies und erkläre: 46,03 qm; 57,68 qm; 0,05 qm!

Lehrer: „Das qm auf unserer Wandtafel ist also in 100 qdm geteilt. Ich könnte nun aus jedem qdm noch kleinere Vierecke, nämlich qcm machen, aber das läßt sich mit der Kreide nur schwer ausführen. Viel leichter geht es auf eueren Schiefertafeln mit dem Griffel. Nehmt das Teillineal! Dasselbe ist genau 2 dm lang. — Wie lang ist aber eine Seite des qdm?" — Schüler: „1 dm lang oder halb so lang als das Teillineal." — Lehrer: „Gut! Zeichnet ein qdm und zwar zuerst die obere Seite! dann die rechte! darauf die linke! zuletzt die untere! — Wie nennen wir dieses Viereck? — Warum qdm? — Legt den roten Rand auf! — Derselbe ist in wie viele kleine Teile geteilt?" — Schüler: „In 20 Teile." — Lehrer: „Nachdem das ganze Lineal 2 dm lang ist und 2 dm = 20 cm sind, wie groß wird also einer unserer Teile sein?" — Schüler: „1 cm groß." — Lehrer: „Tragt an den vier Seiten eures Quadrates die cm auf und verbindet dann die Punkte, die ihr auf diese Weise erhaltet, durch wagrechte und senkrechte Linien! — Welchen Namen werdet ihr nun diesen kleinen Quadraten, von welchen jedes 1 cm lang und breit ist, geben?" — Schüler: „Den Namen Quadratcentimeter." — Lehrer: „In wie viele qcm ist das qdm geteilt? Zählt zuerst die Anzahl der wagrechten Reihen! — Zählt dann, wie viele qcm eine einzelne solche Reihe hat! — Sagt schließlich, wie viele qcm 2, 3, 4 . . . 10 Reihen unseres qdm enthalten! — Ein qdm umschließt also wie viele qcm? — Da nun das qm, wie ihr euch vorhin an der Zeichnung auf unserer Wandtafel überzeugt habt, 100 qdm, jedes qdm aber wieder 100 qcm umfaßt, so hat das qm wie viele qcm?" — Schüler: „100 mal 100 oder 10 000 qcm." — Lehrer: „Das qcm ist demnach der wievieltste Teil des qm?" — Schüler: „Der zehntausendste Teil."

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform: 2 qm 27 qdm 45 qcm; 3 qm 6 qdm 75 qcm; 5 qm 2 qcm &c.

2. Lies und erkläre: 0,7065 qm; 23,0050 qm ꝛc.

Lehrer: „In wie viele qcm habt ihr das qdm geteilt? — Jedes qcm könnte man noch in kleinere Vierecke zerlegen, von welchen jedes 1 mm lang und 1 mm breit ist. Wie hätte man diese kleinsten Quadrate zu benennen? — Warum Quadratmillimeter? — Um die qmm zu zeichnen, müßte man einen sehr fein gespitzten Griffel haben und äußerst genau messen, viel genauer, als ihr es zu stande bringt. Ihr könnt euch aber die Sache auch ohne Zeichnung vorstellen. Wenn wir das qcm in qmm teilen würden, wie viele Reihen von diesen kleinsten Vierecken müßten wir bekommen? — Aus wie vielen qmm würde eine Reihe bestehen? — Somit die 10 Reihen oder das ganze qcm aus wie vielen?“ — Schüler: „100 qmm.“ — Lehrer: „1 qdm hat wie viele qcm?“ — Lehrer: „Darum wie viele qmm?“ — Schüler: „100 mal 100 oder 10 000 qmm.“ — Lehrer: „1 qm hat wie viele qdm?“ — Schüler: „100 qdm.“ — Lehrer: „Daher wie viele qcm?“ — Schüler: „100 mal 100 oder 10 000 qcm.“ — Lehrer: „Und wie viele qmm?“ — Schüler: „100 mal 10 000 oder 1 000 000 qmm.“ — Lehrer: „Der wievieltste Teil des qm ist das qmm?“ — Schüler: „Der millionste Teil.“ — Lehrer: „In welcher Form kann ich darum die qmm sprechen und schreiben?“ — Schüler: „In Bruchform; ich kann jedes qmm als ein Millionstel des qm betrachten.“ — Lehrer: „Wie viele Millionstelquadratmeter sind 2, 12, 30 qmm?“

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform: 2 qm 45 qdm 56 qcm 27 qmm ꝛc.

2. Lies und erkläre: 20,253 670 qm; 0,000 005 qm ꝛc.

Schließlich wird das Ganze noch einmal zusammengefaßt und zwar am Leitfaden der Anschauung. — Der Lehrer deutet auf das qm an der Wandtafel und fragt: „Was ist das? — Warum nennst du dieses Viereck qm? — In wie viele qdm ist es geteilt? — Was entsteht, wenn ich 1 qdm in kleinere Quadrate, jedes 1 cm lang und breit, teile? — Wie viele qcm hat ein qdm? — Welche kleinsten Vierecke erhalte ich aus dem qcm? — Wie viele qmm hat ein qcm? — ein qdm? — ein qm? — Übt die Sätzchen ein: 1 qm = 100 qdm; 1 qdm = 100 qcm; 1 qcm = 100 qmm; 1 qm = 100 qdm = 10 000 qcm = 1 000 000 qmm!“

Lehrer: „Durch qm, qdm, qcm und qmm werden Flächen gemessen. Diese Maße nennt man daher wie? — Ist das qm und qcm eine große Fläche? — Was wird man durch qm ausmessen?“ — Schüler: „Den Boden des Zimmers, die Wand.“ — Lehrer: „Was durch qm und qcm?“ — Schüler: „Die Platte eines Tisches oder Kastens, die Thüre.“ — Lehrer: „Wer wird diese Maße häufig gebrauchen?“ — Schüler: „Der Schreiner, der Zimmermann, der Anstreicher.“ — Lehrer: „Schreiner, Zimmermann und Anstreicher

sind Werkleute; wie wird man darum das Flächenmaß nennen, das von ihnen gebraucht wird?" — Schüler: „Werkflächenmaß." — Lehrer: „Welches ist unser größtes Werkflächenmaß?" — Schüler: „qm." — Lehrer: „Welches ist unser kleinstes?" — Schüler: „qmm." — Lehrer: „Welche zwei Werkflächenmaße kommen wohl am häufigsten in Anwendung?" — Schüler: „qm und qcm."

2. Die Feldflächenmaße: ha, a, qm. — Lehrer: „Felder, Wiesen, Gärten ꝛc. werden ebenfalls gemessen. Wie wird man nun die Maße nennen, mittelst welcher die Fläche der Felder u. dgl. berechnet wird?" — Schüler: „Feldflächenmaße." — Lehrer: „Das kleinste Feldflächenmaß ist das qm, also eine Fläche, die wie lang ist? — wie breit? — Ein größeres Flächenmaß ist das Ar, nämlich eine Fläche, die 10 m lang und ebenso breit ist. Wie viel qm wird das Ar einschließen? — Welcher Teil des a ist ein qm?"

Aufgaben: 1. Schreibe in Bruchform: 20 a 5 qm; 100 a 50 qm! ꝛc.
2. Lies und erkläre: 3,75 a; 10,06 a! ꝛc.

Lehrer: „Das größte Feldflächenmaß ist das Hektar, d. i. eine Fläche, welche 100 m lang und 100 m breit ist und darum 100 a oder 10 000 qm umfaßt. — Das qm ist welcher Teil des ha?"

Aufgaben: 1. Schreibe in Dezimalbruchform: 5 ha 24 a 15 qm; 38 ha 35 qm! ꝛc.

2. Lies und erkläre: 2,3715 ha; 7,0050 ha! ꝛc.

3. Die Körpermaße: cbm, cdm, ccm, cmm. — Der Lehrer zeigt seinen Schülern einen zerlegbaren Kubikdezimeter aus Holz oder Papiermâché und erläutert: „Das ist ein cdm, nämlich ein rechtwinkliger Körper, der genau einen dm lang, einen dm breit und einen dm dick ist." — Dann zerlegt er den Würfel in 10 centimeterdicke Schichten oder Platten; die letzte Schichte außerdem in Säulen oder Stangen von je 1 cm Breite oder Dicke; die letzte Säule sogar in 10 ccm. Die Schüler überzeugen sich dadurch, daß sich das cdm in 10 Schichten oder Platten zerschneiden läßt, daß sich eine jede derartige Schichte aus dem Inhalt von 10 vierkantigen Säulen zusammensetzt, von welchen jede 10 ccm enthält, daß somit eine Schichte aus 10 mal 10 oder 100 ccm und darum das ganze cdm aus 10 mal 100 oder 1 000 ccm besteht.

Aufgaben: 1. Schreibe in Bruchform: 12 cdm 720 ccm! ꝛc.
2. Lies und erkläre: 20,360 cdm! ꝛc.

Lehrer: „Denkt euch einen Würfel oder Kubus, der einen Meter hoch, breit und tief ist. Wie werdet ihr diesen Körper nennen?" — Schüler: „Kubikmeter." — Lehrer: „Was so viel Raum einnimmt als unser gedachter Kubus ist demnach wie groß? — Wann werde ich sagen, daß ein Körper die Größe von 2, 3, 4 . . . Kubikmetern

hat? — Wir wollen jetzt berechnen, wie viele cdm sich aus dem cbm machen ließen. Denkt euch das cbm in 10 dezimeterdicke Schichten oder Platten (Bretter) zerschnitten; denkt euch sodann jede Platte in 10 Säulen oder Balken auseinandergesägt und denkt euch endlich jede Säule in 10 Dezimeterwürfel geteilt. Wir haben sonach 10 Schichten, eine jede aus 10 Säulen zusammengesetzt, das sind im ganzen wie viele Säulen?" — Schüler: „10 mal 10 oder 100 Säulen." — Lehrer: „Jede Säule ist in 10 Würfel zerstückt, somit das Ganze?" — Schüler: „In 100 mal 10 oder 1000." — Lehrer: „Ein cbm hat also wie viele cdm?"

Aufgaben: 1. Schreibt in Bruchform: 3 cbm 375 cdm; 25 cdm! ꝛc.

2. Leset und erkläret: 7,460 cbm! ꝛc.

Lehrer: „Berechnet nun auch, wie viele ccm in einem cbm stecken! Das cbm hat wie viele cdm?" — Schüler: „1000 cdm." — Lehrer: „Jedes cdm hat wie viele ccm?" — Schüler: „1000 ccm." — Lehrer: „Somit haben 1000 cdm oder 1 cbm wie viele ccm?" — Schüler: „1000 mal 1000 oder 1000000 ccm." — Lehrer: „1 ccm ist also der wievieltste Teil des cbm?"

Aufgaben: 1. Schreibt in Bruchform: 2 cbm 345 cdm 790 ccm! ꝛc.

2. Lies und erkläre: 25,846350 cbm! ꝛc.

Lehrer: „Was haben wir uns unter cbm zu denken? — Was unter cdm? — Was unter ccm? — Was werden wir uns unter cmm vorstellen müssen?" — Schüler: „Ein Körperchen (Würfelchen), das 1 mm hoch, 1 mm breit und 1 mm tief ist." — Lehrer: „1 cbm hat wie viele cdm? — 1 cdm wie viele ccm? — 1 ccm wird darum auch wie viele cmm enthalten?" — Schüler: „1000 cmm." — Lehrer: „Nachdem nun 1 ccm = 1000 cmm ist, wie viele cmm wird dann 1 cdm haben?" — Schüler: „1000 mal 1000 oder 1000000 cmm." — Lehrer: „Und aus wie vielen cmm wird das cbm bestehen?" — Schüler: „Aus 1000 mal 1000000 oder aus 1000000000 cmm." — Lehrer: „Welches ist unser größtes Körpermaß? — Welches unser kleinstes? — Memoriert folgende Sätzchen: 1 cbm = 1000 cdm; 1 cdm = 1000 ccm; 1 ccm = 1000 cmm; 1 cbm = 1000 cdm = 1000000 ccm = 1000000000 cmm!"

4. Die höheren Maßeinheiten für m, kg und Buch.

a) Das Kilometer. — Lehrer: „Eine Wegstrecke von 1000 m nennt man Kilometer. Durch km werden die Entfernungen der Ortschaften, die Längen der Straßen ꝛc. gemessen. Alle km kommt auf unseren Landstraßen ein Kilometerstein, alle 5 km eine Stundensäule. Wie lange braucht man ungefähr, um ein km zu Fuß zurückzulegen?"

Aufgaben: 1. 3 km ? m; 7 km 25 m ? m ꝛc.
2. 30 000 m ? km; 5 885 m ? km ꝛc.
3. Schreibe in Bruchform: 20 km 250 m! ꝛc.
4. Lies und erkläre: 36,480 km! ꝛc.

b) Die Tonne. — Lehrer: „Tonne ist eine Last von 1 000 kg, d. i. 2000 Pfd. oder 20 Zentner. Die Befrachtung von Seeschiffen wird meistens in Tonnen angegeben.“

Aufgaben: 1. 6 t 250 kg ? kg ꝛc.
2. 13 750 kg ? t ꝛc.
3. Schreibe ꝛc. 4. Lies und erkläre ꝛc.

c) Rieß und Ballen. — Der Lehrer zeigt wieder einen Bogen Papier und fragt: „10 solche Bogen geben?“ — Schüler: „1 Heft.“ — Lehrer: „10 Heft geben?“ — Schüler: „1 Buch.“ — Lehrer: „1 Buch hat wie viele Bogen?“ — Schüler: „100 Bogen.“ — Lehrer: „10 Buch oder 1 000 Bogen nennt man ein Rieß, 10 Rieß oder 10 000 Bogen einen Ballen. — Ein Ballen hat also wie viele Rieß? — Wie viele Buch? — Wie viele Heft? — Wie viele Bogen? — Welches ist unser größtes Papiermaß? — Welches unser kleinstes? — Lernt auswendig: 1 Ballen = 10 Rieß; 1 Rieß = 10 Buch; 1 Buch = 10 Heft; 1 Heft = 10 Bogen; 1 Ballen = 10 Rieß = 100 Buch = 1000 Heft = 10 000 Bogen!“

---

2. Stufe: Das Addieren der Dezimalbrüche.

1. Übung: Addieren unbenannter Zahlen. (s. Henner.)

Mündlich: a) 6 z + 5 z; 9 h + 6 h; 7 t + 8 t; 4 zt + 9 zt ꝛc. b) 1,8 + 0,5; 0,85 + 0,48; 2,468 + 0,532 ꝛc.

Schriftlich:		
	0,7	0,027534
	4,18	1,39848
	0,005	48,6543
	5,67	72,97852

2. Übung: Addieren benannter Zahlen (s. Henner oder einen beliebigen anderen besseren Rechenmethodiker).

---

3. Stufe: Das Subtrahieren der Dezimalbrüche.

1. Übung: Unbenannte Aufgaben.

2. Übung: Benannte Aufgaben (s. Henner u. a.).

---

4. Stufe: Das Multiplizieren der Dezimalbrüche.

1. Übung: Unbenannte Aufgaben.

a) Der Multiplikator ist einstellig.

Aufgabe: 6,379
× 4

Sprechweise bei der Lösung: 4 mal 9 t sind 36 t; 6 t schreibt man an, 3 h zählt man hinüber. — 4 mal 7 h sind 28 h und 3 h sind 31 h; 1 h schreibt man an, 3 z zählt man hinüber. — 4 mal 3 z sind 12 z und 3 z sind 15 z; 5 z schreibt man an, 1 Ganzes zählt man hinüber. — Komma! — 4 mal 6 Einer sind 24 Einer und 1 Einer sind 25 Einer; 25 schreibt man an. — 4 mal 6,379 ist 25,516.

b) Der Multiplikator ist eine reine Zehner-, Hunderter- oder Tausenderzahl.

Aufgaben:	4,325	6,73	0,55
	× 20	× 400	× 8 000

Lösung: 0,55
× 8000
4 400,00 = 4400

Sprechweise bei der Lösung: Mit 8000 vermehrt man, wenn man drei Nullen macht und noch mit 8 multipliziert. Also: 0 h; 0 z; Komma; 0 Einer. — Jetzt vermehrt man noch mit 8. — 8 mal 5 ist 40; 0 Zehner schreibt man an u. s. f.

c) Der Multiplikator ist eine gemischte Zehner-, Hunderter- oder Tausenderzahl.

Aufgaben:	0,357	0,054	13,08
	× 36	× 608	× 4320

Lösung: 0,054
× 608
0,432
32,400
32,832

Sprechweise bei der Lösung: 608 mal 54 t. — Zuerst vermehrt man mit 8, dann vermehrt man mit 600, dann zählt man zusammen. — 8 mal 4 t sind 32 t; 2 t schreibt man an, 3 h zählt man hinüber. — 8 mal 5 h sind 40 h und 3 h sind 43 h; 43 h oder 3 h und 4 z schreibt man an. — Komma. — 0 Einer. — Jetzt multipliziert man mit 600. — Mit 600 vermehrt man, wenn man zwei Nullen macht und noch mit 6 vermehrt. Also: 0 t; 0 h; 6 mal 4 ist 24; 4 z schreibt man an u. s. w.

Kürzung des Multiplikationsverfahrens durch Verschieben des Komma. — Ist der Schüler im umständlichen Multiplizieren der Dezimalbrüche fest, so sagen wir ihm, daß sich dasselbe in einigen Fällen kürzen läßt, nämlich

1. so oft der Multiplikator irgend eine höhere dekadische Einheit, also 10 oder 100 oder 1 000 u. s. f. ist und

2. so oft er ein reines Vielfache dieser höheren dekadischen Einheiten, also 20, 500, 7 000 ꝛc. ist. — Im ersten Falle führt das bloße Verschieben des Komma um eine, zwei, drei ꝛc. Stellen zum Resultat; im zweiten dagegen das Versetzen des Komma und das gleichzeitige Multiplizieren mit der betreffenden Grundzahl (2; 5; 7 ꝛc.). — Diese Kürzungen sollen aber nur den besten, den talentvollsten Kindern, also jenen gelehrt werden, von denen man mit Bestimmtheit voraussetzen darf, daß sie dieselben auch wirklich verstehen werden. Der Troß der Mittelmäßigen und Schwachbegabten mag sich nach wie vor mit der umständlicheren Lösung behelfen. Eine einzige, aber auf alles anwendbare Regel, eine Regel, die nie im Stiche läßt, die immer mit der größten Verlässigkeit, wenn auch zuweilen auf eine zeitraubende Weise zum Ziele leitet, ist mehr wert, als ein halb Dutzend noch so praktischer Rechenvorteile, von denen aber jeder seine Ausnahme hat und nur ganz bestimmte Fälle unter sich begreift. Ein Schwachkopf ist ohnedies leicht verwirrt. Man braucht die Konfusion nicht noch systematisch zu steigern. Ich fordere darum für die Volksschule Regeln, welche ausnahmslos gelten und verwerfe grundsätzlich alle Kunstgriffe, die zwar den Lösungsgang kürzen, somit Zeit ersparen, aber zugleich den Mechanismus des Rechnens vielgestaltig und kompliziert machen.

2. **Übung**: Benannte und angewandte Aufgaben.

a) Benannte Aufgabe: 1 000 × 2,75 ℳ.

Lösung:
```
   2,75 ℳ
 × 1000
 ───────
 2750,00 ℳ = 2750 ℳ
```

Sprechweise bei der Lösung: 1000 mal 2 ℳ 75 ₰. — Mit 1000 vermehrt man, wenn man drei Nullen macht und noch mit 1 multipliziert. — Also: 0 h; 0 z; Komma; 0 Einer; 1 mal 5 ist 5; 5 Zehner schreibt man an ꝛc.

b) Angewandte Aufgabe: 1 hl Bier kostet 19,50 ℳ; was kosten 350 hl?

Lösung:
```
   19,50 ℳ
 × 350
 ─────────
   975,00 ℳ
  5850,00 „
 ─────────
  6825,00 ℳ = 6825 ℳ
```

Sprechweise bei der Lösung: „1 hl Bier kostet 19 ℳ 50 ₰, darum kosten 350 hl 350 mal 19 ℳ 50 ₰. — Zuerst vermehrt man mit 50, dann vermehrt man mit 300, dann zählt man zusammen oder mit anderen Worten: zuerst rechnet man aus, was 50 hl, darauf, was 300 hl und schließlich, was 350 hl kosten. — Mit 50 vermehrt man, wenn man eine Null macht und noch mit 5 multipliziert. Also: 0 h. 5 mal 0 ist 0; 0 z schreibt man an. Komma. 5 mal 5 ist 25; 5 Einer schreibt man an, 2 Zehner zählt man hinüber. 5 mal 9 ist 45 und 2 ist 47; 7 Zehner schreibt man an, 4 Hunderter zählt man hinüber. 5 mal 1 ist 5 und 4 ist 9; 9 Hunderter schreibt man an. 50 mal 19 ℳ 50 ₰ sind 975 ℳ — Jetzt vermehrt man mit 300. Mit 300 multipliziert man, wenn man zwei Nullen macht“ u. s. f. — Schließlich wird die Rechnung wieder in ihre einzelnen Ergebnisse zerlegt und jedes davon besonders gelesen: 1 hl kostet 19 ℳ 50 ₰; 50 hl kosten 975 ℳ; 300 hl kosten 5 850 ℳ und 325 hl 6 825 ℳ

---

5. Stufe: Das Enthaltensein der Dezimalbrüche.

1. Übung: Unbenannte Aufgaben.

a) Wie oft lassen sich 0,05 von 0,2; 0,2 von 12,8 rc. wegnehmen?

b) Wie oft sind 0,005 in 2,5; 1,2 in 26,4 rc. enthalten?

Regel: Ehe man das Enthaltensein der Dezimalbrüche zu ermitteln beginnt, muß man Divisor und Dividend gleichnamig machen, d. h. dem einen so viele Nullen anhängen, bis er die Anzahl der Dezimalstellen des anderen erreicht.

Beispiel: 0,005 | 2,5. Der Divisor hat drei Dezimalstellen, der Dividend nur eine, darum muß ich dem letzteren zwei Nullen anhängen, aus vorstehender Aufgabe also folgende machen:

0,005 | 2,500

Nun ist die Berechnung leicht. Die Tausendstel werden genau so geteilt wie Ganze. Das Komma ist bedeutungslos geworden und darf ignoriert werden. Der Schüler spricht: 5 t sind in 2 500 t 500 mal enthalten.

2. Übung: Benannte und angewandte Aufgaben.

a) 0,05 ℳ | 0,5 ℳ — Lösung: Nachdem der Divisor zwei Dezimalstellen hat, habe ich dem Dividenden eine Null anzuhängen, also 0,05 ℳ | 0,50 ℳ Die h teilen sich aber wie ganze Zahlen. 5 h ℳ sind in 50 h ℳ 10 mal enthalten. Das Ergebnis heißt sonach 10.

b) Um 1,25 ℳ bekommt man 1 Stück, ? um 23,75 ℳ

Lösung: 1,25 ℳ | 23,75 ℳ = <u>19 Stücke.</u>

---

6. Stufe: Das Teilen der Dezimalbrüche.

Hier unterscheide ich drei Fälle.

1. Der Divisor steht in der Form der ganzen Zahl, z. B. 8 | 2,40 hl (wird gelesen: der 8. Teil oder $^1/_8$ von 2 hl 40 l macht wie viel?).

2. Der Divisor hat die Form eines gemeinen Bruches und läßt dadurch erkennen, daß der Dividend in so viele Teile geteilt werden soll, als der Nenner des Divisors angibt und daß davon so viele Teile zu behalten sind, als der Zähler desselben ausdrückt, z. B. $^3/_4$ | 5,84 *M.* (wird gelesen: $^3/_4$ von 5,84 *M.* betragen wie viel?).

3. Der Divisor ist in der Gestalt eines Dezimalbruches gegeben und zeigt dadurch an,

a) daß der Dividend in so viele Teile zerlegt werden soll, als durch die Dezimalstellen des Bruches angedeutet ist, also bei einer Dezimalstelle (Zehntel) in zehn, bei zwei Stellen (Hundertstel) in hundert, bei drei (Tausendstel) in tausend u. s. w.,

b) daß so viele Teile behalten werden müssen, als der Zähler unseres Bruches, d. i. die eigentliche Bruchzahl angibt. — Beispiele: 0,1 | 3,70 *M.* (wird gelesen: $^1/_{10}$ von 3,70 *M.*); 0,507 | 88,19 *M.* (wird gelesen: $^{507}/_{1000}$ von 88 *M.* 19 *ℛ* betragen wie viel? oder: wie viel ist der tausendste Teil von 88,19 *M.* 507 mal genommen?).

Außer diesen drei Fällen hätten wir noch einen vierten zu unterscheiden, nämlich jenen, bei welchem der Divisor als gemischte Zahl erscheint. Da man aber hier diese Zahl vor der Division regelmäßig in eine einfache Bruchzahl umwandeln wird, so können wir diesen Fall unter den zweiten und dritten subsumieren.

1. Übung: Benannte Aufgaben.

a) Der Divisor steht in der Form der ganzen Zahl, z. B. 20 | 93,8 m.

Lösung: 20 | 93,8 m = <u>4,69 m.</u>

Sprechweise bei der Lösung: Der 20. Teil von 93,8 m. — Zuerst teilt man die Ganzen. Der 20. Teil von 93 Ganzen sind 4 Ganze u. s. f.

b) Der Divisor hat die Gestalt eines gemeinen Bruches, z. B. $^7/_{12}$ von 32,52 *M.*

Lösung: $^7/_{12}$ von 32,52 *M.*
12 | 32,52 *M.* = 2,71 *M.*
× 7
18,97 *M.*

Sprechweise bei der Lösung: $^7/_{12}$ von 32,52 *M.* — Zuerst rechne ich, was $^1/_{12}$ von 32 *M.* 52 *₰* macht, und dann erst wie viel $^7/_{12}$ betragen. — Also: $^1/_{12}$ oder der 12. Teil von 32,52 *M.* Der 12. Teil von 32 Ganzen sind 2 Ganze u. s. f.

Aufgabe: $3^1/_2$ von 2,50 *M.*

Lösung: $3^1/_2$ von 2,50 *M.* = $^7/_2$ von 2,50 *M.*

2 | 2,50 *M.* = 1,25 *M.*
× 7
8,75 *M.*

Sprechweise bei der Lösung: $3^1/_2$ sind $^7/_2$. Ich muß also berechnen, wie viel $^7/_2$ von 2,50 *M.* sind. Zuerst berechne ich $^1/_2$ oder den 2. Teil von 2,50 *M.* Der 2. Teil von 2 Ganzen ist 1 Ganzes u. s. f.

c) Der Divisor erscheint in der Form des Dezimalbruches z. B. 0,5 von 9,7 m.

Lösung: 0,5 von 9,7 m

9,7 m
× 5
4,85 m.

Sprechweise bei der Lösung: 0,5 von 9,7 m heißt: wie viel ist der zehnte Teil von 9,7 m 5 mal genommen? — Ich muß also mit 10 teilen und mit 5 vermehren. — Vermehren wir zuerst mit 5! 5 mal 7 ist 35; 5 an, 3 hinüber; 5 mal 9 ist 45 und 3 ist 48. Teilen wir nun mit 10, indem wir das Komma um eine Stelle weiter nach links rücken! $^5/_{10}$ von 9,7 m sind sonach 4,85 m.

Aufgabe: 7,3 mal 5,160 kg.

Lösung: 7,3 mal 5,160 kg

5,160 kg
× 73
15 480
361 200
37,6680 = 37,668 kg.

Sprechweise bei der Lösung: 7,3 sind 73 z. Ich muß also den zehnten Teil von 5,160 kg 73 mal nehmen oder mit anderen Worten: ich muß 5,160 kg durch 10 teilen und mit 73 multiplizieren. Vermehren wir zuerst mit 73! 3 mal 0 ist 0 ꝛc. — Teilen wir nun mit 10, indem wir das Komma um eine Stelle weiter nach links rücken. 73 z von 5,160 kg sind sonach 37,6680 kg oder 37 kg 668 g.

Später, nachdem mehrere Aufgaben auf vorstehende Weise berechnet worden sind, mag man den Schülern die bekannte, aber von unseren seitherigen Methodikern nur mechanisch und gedankenlos an=

gewandte Regel abstrahieren und einprägen lassen: Ist der Divisor ein Dezimalbruch oder eine ganze Zahl mit Dezimalbruch, so muß man ihn mit dem Dividenden multiplizieren und dann im Ergebnis so viele Dezimalstellen abstreichen als der Divisor und Dividend zusammen haben.

Noch sei bemerkt, daß man unsere Divisionsart bis jetzt fälschlich als eine Multiplikation bezeichnet und den Divisor darum Multiplikator genannt hat.

2. Übung: Angewandte Aufgaben, z. B. 7 kg kosten 18,20 ℳ; ? 1 kg.

Lösung: 7 | 18,20 ℳ = 2,60 ℳ

Aufgabe: 1 Ztr. zu 20,50 ℳ; ? 20 $^3/_4$ Ztr.

Lösung: 20$^3/_4$ mal 20,50 ℳ = $^{83}/_4$ von 20,50 ℳ

4 | 20,50 ℳ = 5,125 ℳ
× 83
15,375
410,000
425,375 ℳ = 425,38 ℳ

Aufgabe: 1 m zu 25,70 ℳ; ? 2,25 m.

Lösung: 2,25 mal 25,70 ℳ

25,70
× 2,25
12 850
51 400
514 000
57,8250 ℳ = 57,83 ℳ

---

7. Stufe: Aufgaben mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Umwandeln der einen Bruchart in die andere.

1. Übung: Verwandeln der gemeinen in Dezimalbrüche.

Aufgaben: Macht Dezimalbrüche aus $^1/_8$; $^1/_{12}$; $^1/_{20}$; $^1/_{15}$ ꝛc.; aus $^7/_8$; $^{13}/_{15}$; $^{11}/_{24}$ ꝛc.!

Lehrer: „Ihr sollt $^1/_8$ in einen Dezimalbruch umwandeln, d. h. diesen Teil aus kleineren Teilen und zwar aus Zehntel, Hundertstel, Tausendstel zusammensetzen. — Versuchen wir es zuerst mit den Zehnteln! Das Ganze hat 10 z, daher $^1/_8$ den 8. Teil von 10 z oder 1 z, bleiben 2 z als Rest. — Diesen Rest wollen wir nun in Hundertstel verwandeln, davon wiederum das Achtel nehmen und dann

dieses Ergebnis zu dem ersten addieren. 2 z sind 20 h. Ein Achtel von 20 h sind 2 h; bleiben noch 4 h. Diese 2 h zu 1 z addiert macht 12 h. — Von den 4 h, die als Rest geblieben sind, kommt wieder ein Achtel auf unsern Teil. 4 h sind 40 t. Ein Achtel von 40 t sind 5 t. Das zu dem vorigen Ergebnis (12 h) addiert, gibt 125 t oder 0,125."

Auf diese umständliche Weise läßt man den Kindern noch mehrere gemeine in Dezimalbrüche umwandeln und dann erst läßt man ihnen durch Vergleichung die Regel abziehen: Um aus einem gewöhnlichen einen Dezimalbruch zu machen, hängt man dem Zähler des ersteren fortgesetzt Nullen an und dividiert mit dem Nenner so lange darein, bis dieser in jenen ohne Rest aufgeht oder bis die Teile so klein werden, daß sie jegliche Bedeutung für das praktische Rechnen verlieren; so darf man bei den Bruchteilen der *M.* nicht über Hundertstel, bei jenen des kg nicht über Tausendstel hinausgehen.

2. **Übung:** Verwandeln der Dezimalbrüche in gemeine.

Regel: Man schreibt den Dezimalbruch in der Form des gewöhnlichen an und sucht dann Zähler und Nenner gegenseitig zu kürzen.

Beispiel: 0,375.

Lösung: $^{375}/_{1000} = ^{15}/_{40} = ^{3}/_{8}$; $\underline{0{,}375 = ^{3}/_{8}}$.

3. **Übung:** Addieren der gemeinen zu den Dezimalbrüchen.

Beispiele: $^{7}/_{8} + 0{,}65$; $^{7}/_{16} + 2{,}365 + ^{3}/_{4}$.

4. **Übung:** Subtrahieren der gemeinen von Dezimalbrüchen und umgekehrt.

Beispiele: $2{,}675 - 1^{3}/_{8}$; $12^{5}/_{20} - 4{,}35$.

5. **Übung:** Enthaltensein der gemeinen in den Dezimalbrüchen und umgekehrt.

Beispiele: Wie oft sind $^{3}/_{5}$ in 4,2 enthalten? Wie oft 0,002 in $^{7}/_{8}$?

Zweiter Gegenstand: Die Teilungs- oder Gesellschaftsrechnung.

1. **Übung:** Die Teilung nach arithmetischen Verhältnissen. (Nur die leichtesten Aufgaben. Schwierigere Teilungsrechnungen gehören überhaupt nicht in die Volksschule.)

1. Beispiel: 27 *M.* sollen unter A und B so verteilt werden, daß A um 7 *M.* mehr bekommt als B.

Lösung durch Zeichnung und bloßes Zählen. — Lehrer: „Macht in der Mitte euerer Tafel einen horizontalen Strich! Dieser Strich soll den Anteil des A von jenem des B trennen. Schreibt darum an den Anfang der Linie und zwar oberhalb derselben den Buchstaben A, unterhalb B! — Wie viel bekommt A mehr als B?" — Schüler:

„7 ℳ." — Lehrer: „Zeichnet neben den Buchstaben A 7 Punkte oder Ringelchen! Diese Punkte oder Ringelchen sollen Markstücke vorstellen. — Nachdem ihr von den 27 ℳ bereits 7 ℳ dem A zugewiesen habt, wie viel kommt noch zur Verteilung?" — Schüler: „20 ℳ" — Lehrer: „Verteilt die 20 ℳ gleichheitlich auf A und B, indem ihr von je zwei Markstücken (Punkten, Ringelchen) immer eines über die Linie und eines unter dieselbe zeichnet und zählt dabei laut: 1, 2; 3, 4; 5, 6 u. s. f.!"

Die Schüler erhalten dadurch folgende Zeichnung auf ihre Tafel



Lehrer: „Wie viel hat A bekommen? Zählt! — Wie viel B? Zählt! — Um wie viel hat A mehr erhalten? — Sind diese 7 ℳ auch zur Verteilung gekommen? — Was hast du mit ihnen gethan?" — Schüler: „Ich habe sie vor der Verteilung weggenommen und dem A gegeben." — Lehrer: „Wie viel wurde also zwischen A und B gleichheitlich verteilt?" — Schüler: „Nur 20 ℳ" — Lehrer: „Berechnet mir nun dieselbe Aufgabe, die ihr soeben durch Zeichnen und Zählen gelöst habt, frei im Kopf!"

2. Beispiel: 345 ℳ sollen unter A, B und C so verteilt werden, daß B um 15 ℳ mehr als A und C wieder um 15 ℳ mehr als B erhält. Wie viel trifft auf jeden?

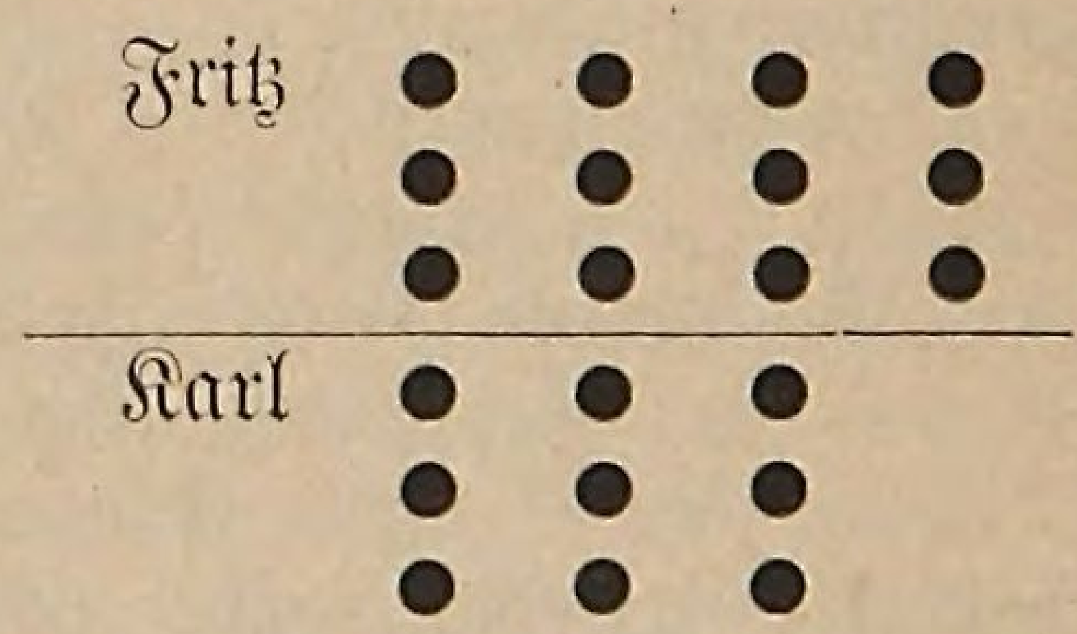
Lösung durch Ziffern und eigentliches Rechnen. — Lehrer: „Schreibt die Buchstaben A, B, C senkrecht unter einander! — Werden die 345 ℳ gleichheitlich verteilt? — Was wird vor der gleichheitlichen Verteilung weggenommen?" — Schüler: „Die 15 ℳ, welche B mehr als A erhält." — Lehrer: „Gebt dem B die 15 ℳ, d. h. schreibt neben den Buchstaben B die Zahl 15!" — Lehrer: „Was muß noch ferner vor der Verteilung abgezogen werden?" — Schüler: „Die 15 ℳ, welche der C mehr bekommt als der A, und die weiteren 15 ℳ, welche er wieder mehr erhält als der B." — Lehrer: „Schreibt zum Anteil des C 15 ℳ + 15 ℳ = 30 ℳ! — Wie viel werden also im Ganzen vor der Verteilung weggenommen?" — Schüler: „Die 15 ℳ des B und die 30 ℳ des C, somit 45 ℳ" — Lehrer: „Wie viel kommt zur Verteilung?" — Schüler: „345 ℳ weniger 45 ℳ oder 300 ℳ" — Lehrer: „Nachdem die 300 ℳ unter A, B und C gleichheitlich verteilt werden sollen, was trifft auf jeden?" — Schüler: „$^1/_3$ von 300 ℳ, d. i. 100 ℳ" — Lehrer: „Schreibt zum Anteil des A 100 ℳ; zum Anteil des B ebenfalls 100 ℳ und zählt dann die 15 ℳ hinzu; zu jenem des C wieder 100 ℳ und addiert dazu die 30 ℳ! — Was bekommt A? — B? — C? — Was bekommen alle drei zusammen?"

2. **Übung:** Die Teilung nach geometrischen Verhältnissen. (Ebenfalls nur die leichtesten Aufgaben.)

Beispiel: 21 Nüsse werden unter zwei Knaben, Fritz und Karl, so verteilt, daß Fritz um 1/3 mehr bekommt, als Karl.

Lösung mittelst Zeichnung. — Lehrer: „Bekommen Fritz und Karl gleich viel? — Wer erhält mehr? — Um wie viel erhält Fritz mehr als Karl? — Gut! Gebt jetzt Acht! Der Karl bekommt einen Teil von den Nüssen und der Fritz bekommt einen, aber außerdem noch 1/3, sonach einen ganzen und einen dritten Teil oder 1 1/3. Ein Ganzes sind 3 Drittel; 1 1/3 sind 4 Drittel. Der Karl erhält also 3 Drittel und der Fritz 4 Drittel von der Anzahl der Nüsse, macht zusammen 7 Drittel. — Auf wie viele Teile muß ich darum die Nüsse verteilen?" — Schüler: „Auf 7 Teile." — Lehrer: „Wie viele Teile bekommt Fritz? — Wie viele Karl? — Macht quer über die Tafel einen wagrechten Strich! — Oberhalb dieses Striches soll der Anteil Fritzens zu liegen kommen; unterhalb desselben der des Karl. Die Nüsse wollen wir durch Punkte oder Ringelchen veranschaulichen. Zeigt mir nun, wohin wir die Nüsse unseres Fritz legen werden! — Schreibt über die Linie und zwar an den Anfang derselben den Namen Fritz! — Deutet jetzt auf den Platz, auf den Karls Anteil kommen wird und schreibt unter die Linie und zwar ebenfalls an den Anfang den Namen Karl! — Verteilt jetzt, indem ihr von je 7 Punkten immer 4 über unseren wagrechten Strich und 3 unter denselben zeichnet! Zählt dabei: 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7; u. s. w.!"

Das führt zu folgender Darstellung auf der Schülertafel



Lehrer: „Wie viele Teile habt ihr gemacht?" — Schüler: „7 Teile." — Lehrer: „Wie viele Nüsse treffen auf einen solchen Teil?" — Schüler: „3 Nüsse." — Lehrer: „Wie viele Teile hat Fritz bekommen?" — Schüler: „4 Teile." — Lehrer: „Demnach wie viele Nüsse?" — Schüler: „4 mal 3 oder 12 Nüsse." — Lehrer: „Wie viele Teile hat Karl erhalten?" — Schüler: „3 Teile." — Lehrer: „Das sind wie viele Nüsse?" — Schüler: „3 mal 3 oder 9 Nüsse."

Dritter Gegenstand: Die Durchschnittsrechnung.

Bei der Durchschnittsrechnung handelt es sich darum, eine Anzahl verschiedener Mengen oder Größen in dieselbe Anzahl gleicher Mengen oder Größen umzuwandeln, ein ungleich Geteiltes in gleiche Teile zu bringen, gegebene Quantitäten so zu verändern, daß die eine genau so groß wird wie die andere. Um die Aufgaben unserer Rechenart lösen zu können, müssen die gegebenen Größen (ungleichen Teile) erst zu einem Ganzen zusammengefaßt, d. i. addiert und dann neuerdings geteilt werden. Dieser Rechenvorgang ist zu vergleichen mit dem Einschmelzen verschieden großer, verschieden wertiger Münzen (Thaler, Gulden, Sechser, Groschen 2c.) und dem nachfolgenden Umprägen zu gleich großen, gleich wertigen Geldstücken (z. B. Mark) und setzt sich, wie bereits angedeutet wurde, aus Addition und Division zusammen; doch ist er keineswegs ein bloßes Konglomerat, eine zufällige Aneinanderreihung dieser beiden Spezies, sondern eine eigentümliche, für sich bestehende Rechenart, welche in der Wissenschaft und im praktischen Leben häufig zur Anwendung kommt und welche namentlich bei statistischen Erhebungen eine wichtige Rolle spielt. In der Theorie wird unsere Rechenoperation sehr passend als das „Suchen des arithmetischen Mittels“ bezeichnet. Selbstverständlich haben wir uns in der Volksschule wieder auf die leichtesten Aufgaben zu beschränken.

Beispiel: Ein Taglöhner verdient in einer Woche 7 *M.*, in einer anderen 12 *M.*, in einer dritten 8 *M.*, wie viel im Durchschnitt?

Anschauliche Lösung: Unser Taglöhner hat sich erworben in der

1. Woche	● ● ● ● ● ● ●	7 *M.*
2. Woche	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	12 „
3. Woche	● ● ● ● ● ● ● ●	8 „
	somit im Ganzen	27 *M.*

Den Gesamtverdienst (27 *M.*) muß ich nun auf die drei Wochen gleichheitlich verteilen. Es kommen darum von je 3 *M.* immer eine auf die 1., eine auf die 2. und eine auf die 3. Woche. Also

1. Woche	● ● ● ● ● ● ● ● ●	9 *M.*
2. Woche	● ● ● ● ● ● ● ● ●	9 „
3. Woche	● ● ● ● ● ● ● ● ●	9 „
		27 *M.*

Der Taglöhner hat sich demnach in der Woche durchschnittlich 9 *M.* erarbeitet.

Lehrer: „Die Durchschnittszahl (9 *M.*) ist aber nur eine gedachte, denn unser Mann hat in keiner der drei Wochen thatsächlich 9 *M.* verdient, sondern bald mehr (12 *M.*), bald weniger (7 *M.* und

8 ℳ); endlich ist diese Zahl, wenn wir sie mit den wirklichen wöchentlichen Einnahmen vergleichen, eine **mittlere**, sie ist also weder so groß, wie die gegebene größte Zahl (12 ℳ), noch auch so klein, wie die gegebenen kleineren Zahlen (7 ℳ und 8 ℳ)."

Vierter Gegenstand: Die Mischungsrechnung.

Diese Spezies ist ihrem Wesen nach nichts anderes als eine besondere Form der Durchschnittsrechnung; sie ist die Durchschnittsrechnung angewandt auf Werte (Qualitäten). Darum liegt ihr auch das gleiche Lösungsverfahren zu Grunde. Der Preis einer Mischung oder Legierung wird genau auf dieselbe Weise bestimmt, wie man das arithmetische Mittel verschiedener Längenausdehnungen u. dgl. berechnet.

Beispiel: Es werden drei Sorten Weine gemischt. Die Maß der besseren Sorte kostet 4 ℳ, die der mittleren 3 ℳ und die der schlechteren 2 ℳ Welchen Wert hat eine Maß der Mischung?

Anschauliche Lösung:

1 Maß der ersten Sorte	● ● ● ●	4 ℳ
1 „ „ zweiten „	● ● ●	3 „
1 „ „ dritten „	● ●	2 „
3 Maß der zu mischenden Sorten kosten somit		9 ℳ

Durch das Mischen wird die Maß der besseren Sorte verschlechtert, die der geringeren dagegen verbessert. Die Qualität des Weines wird eine mittlere und darum muß auch der Preis für die Maß der Mischung ein mittlerer werden; er kann weder 4 ℳ noch 2 ℳ betragen. Wie hoch er sich aber belaufen wird, ist leicht zu berechnen. Denn der Gesamtwert der unvermischten drei Sorten (d. i. 9 ℳ) überträgt sich ja unverändert auf die Mischung und nachdem eine Maß der letzteren genau so gut oder schlecht ist wie die andere, so kommen auch von je 3 ℳ des ursprünglichen Totalwertes eine auf die erste, eine auf die zweite und eine auf die dritte Maß der Mischung. Man braucht also nur die 9 ℳ in der bekannten Weise auf drei Teile zu verteilen, um das gewünschte Resultat zu erhalten.

1. Maß der Mischung	● ● ●	3 ℳ
2. „ „ „	● ● ●	3 „
3. „ „ „	● ● ●	3 „
Die 3 Maß der Mischung zusammen		9 ℳ

Das fünfte Schuljahr.

Übersicht.

Gegenstand: Die auf dem Messen oder Enthaltensein beruhenden Rechenarten (Raum-, Verhältnis- und Prozentrechnung).

Veranschaulichungs- und Lehrmittel: Teillineal für das Raumrechnen. Neuer Ansatz für die Verhältnis- und Prozentrechnung.

Lehrgang:

Erster Gegenstand: Das Elementarste aus der Raumrechnung, nämlich das Messen und Berechnen geradliniger Längen, Flächen und Körper.

Zweiter Gegenstand: Die Verhältnisrechnung.

1. Stufe: Verhältnisrechnungen mit zweigliedrigem Bedingungssatz.
2. Stufe: Verhältnisrechnungen mit mehrgliedrigem Bedingungssatz.
3. Stufe: Verhältnisrechnungen mit mehreren Bedingungssätzen.

Dritter Gegenstand: Die Prozentrechnung.

1. Stufe: Die reine Prozentrechnung.
2. Stufe: Verhältnisrechnungen mit Prozentbestimmungen.

Erster Gegenstand: Das Elementarste aus der Raumrechnung.

Nachdem unser Schüler im vierten Schuljahr mit gemeinen und Dezimalbrüchen rechnen und unsere Maße kennen gelernt hat, wird in der fünften Klasse mit der Bemessung und Berechnung räumlicher Ausdehnungen begonnen. Der Schüler bedient sich dabei wieder des Teillineals und zwar jenes Randes, auf welchem die Zwanzigstel oder Centimeter aufgetragen sind.

A. Vom Längenmaße und von der Ausmessung geradliniger Längen, Breiten und Höhen.

1. Das Meter und seine Teile. (Wiederholung alles dessen, was schon im vierten Schuljahre vom Längenmaß gelehrt wurde.)

2. Ausmessen der Länge und Breite des Zimmers, des Pultes, des Kastens, der Bänke rc., dann der Höhe und Breite der Wände, Fensterstöcke und Thüren durch den Lehrer oder durch einen fähigeren Schüler.

3. Ausmessen der Länge und Breite der Schiefertafeln, Bücher, Hefte ꝛc. durch die Schüler mittelst des Teillineals.

4. Ziehen von Linien von bestimmter Richtung und Länge auf der Schiefertafel. — Lehrer: „Nehmt euer Teillineal und zeichnet eine Senkrechte von 12 cm Länge! — Eine Wagrechte mit 20 cm! — Eine Schräge mit 15 cm!“

5. Vom Ausmessen der Wegstrecken durch den Geometer und ihrer verkleinerten Nachbildung und Darstellung auf Karten und Plänen. Die Schüler werden angeleitet, bestimmte Bahn- und Wegstrecken auf ihren Tafeln zu zeichnen. 1 cm mag dabei einem km, einer Meile oder einer beliebigen anderen größeren Entfernung gleichgesetzt werden.

B. Vom Flächenmaß und von der Ausmessung der Vier-, Drei- und Vielecke.

1. Die Werkflächenmaße qm, qdm, qcm, qmm und die Feldflächenmaße ha, a, qm. (Rekapitulation des im vierten Schuljahre davon Behandelten.)

2. Die geographischen Flächenmaße □ km, □ Meile.

3. Die Ausmessung von Rechtecken.

a) Durch Zeichnung auf der Wandtafel. — Der Lehrer konstruiert vor den Augen der Schüler eine Reihe von Rechtecken und zwar vor allem solche, welche bei verschiedener Basis (1 dm, 2 dm, 3 dm ꝛc.) gleiche Höhe (4 dm) oder bei verschiedener Höhe (1 dm, 2 dm ꝛc.) gleiche Basis (etwa 3 dm) haben; durch Querlinien teilt er sodann jede Figur in kleinere Vierecke (qdm), läßt dieselben von den Kindern zählen und leitet zuletzt die bekannte Regel ab: Der Inhalt eines Rechteckes wird berechnet, indem man Basis und Höhe mit einander multipliziert.

b) Durch Zeichnung auf der Schiefertafel. — Lehrer: „Macht 8 Rechtecke, jedes 9 cm hoch, das erste aber 2 cm, das zweite 3 cm, das dritte 4 cm ꝛc. breit und zeigt hernach durch Querlinien an, wie viele qcm sich aus jedem einzelnen der gezeichneten Vierecke konstruieren lassen!“

4. Berechnung verschiedener, nicht zu großer rechteckiger Flächen (Schulzimmerboden, Fläche der Wand, der Thüre, des Pultes ꝛc.). — Zeichnen des Schulzimmerplanes. Maßstab: 1 cm = 1 m; 1 qcm = 1 qm.

5. Berechnung rechtwinkliger Grundstücke. Zeichnen derselben. Maßstab: 1 cm = 10 m; 1 qcm = 1 a; 1 dm = 100 m; 1 qdm = 1 ha.

6. Das verschobene Rechteck oder das schräge Parallelogramm.

a) Umwandlung desselben in das rechtwinklige Viereck durch Zeichnung auf der Wand- und Schiefertafel.

b) Berechnung derartiger Parallelogramme.

7. Das Halbieren der regelmäßigen Vierecke (Quadrat, Rechteck, verschobenes Parallelogramm) durch die Diagonale. — Berechnung der daraus entstehenden Dreiecke.

8. Die Konstruktion des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreieckes.

9. Das ungleichseitige oder unregelmäßige Viereck, seine Umwandlung in Dreiecke, seine Berechnung.

10. Konstruktion des Achteckes und des Sechzehneckes aus dem Quadrate, des Sechs- und des Zwölfeckes aus dem gleichseitigen Dreiecke, Umwandlung dieser Polygone in Dreiecke, Berechnung derselben.

C. Vom Körpermaße und von der Ausmessung rechtwinkliger Körper und Hohlräume.

1. Das Kubikmeter und seine Teile (cdm, ccm und cmm).

2. Die Berechnung rechtwinkliger Körper (Balken, Mauern, Quadersteine). — Am zerlegbaren Kubikdezimeter muß vorerst die Regel entwickelt werden, daß der kubische Inhalt eines Körpers gefunden wird, wenn man Länge, Breite und Höhe mit einander multipliziert.

3. Die Berechnung rechtwinkliger Hohlräume (Zimmer, Braukessel, Brunnentröge, Kisten, Schränke).

4. Berechnung der Teile eines in der Diagonale durchschnittenen rechtwinkligen Körpers.

Das wäre in Kürze alles, was aus der Geometrie oder dem sogenannten Raumrechnen nach meiner Ansicht in der Volksschule gelehrt werden soll, gelehrt werden muß. Man kann dem Schüler, wenn man es für unbedingt notwendig hält, außerdem noch die Formeln für die Berechnung der Kreislinie geben. Darüber hinausgehen darf man nicht. Für die Entwicklung des Pythagoräischen Lehrsatzes u. dgl. fehlt unseren Kindern das richtige Verständnis. Man verschone sie deshalb damit und behalte diese Dinge den mittleren und höheren Schulen vor.

Zweiter Gegenstand: Die Verhältnisrechnung.

1. Stufe: Verhältnisrechnungen mit einem zweigliedrigen Bedingungssatze.

(Der Lehrgang für das mündliche Rechnen schließt sich eng an jenen für das schriftliche an. Er behandelt denselben Stoff nur in kleineren oder wenigstens bequemeren Zahlen. Endlich sei bemerkt, daß auf eine Reihe von Verhältnisaufgaben immer wieder Übungen im Addieren und Subtrahieren mit unbenannten, einfach und mehrfach benannten Zahlen folgen müssen, damit der Schüler die in diesen Rechenarten erworbene Fertigkeit nicht verliert.)

1. Übung: Verhältnisrechnungen mit ganzen Zahlen.

A. Das Ansetzen der Aufgabe.

a) Gerades Verhältnis.

Ansatz:

ℳ ?	7 m
m 3	15 ℳ

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel ℳ kosten 7 m, wenn 3 m 15 ℳ kosten?

b) Umgekehrtes Verhältnis.

1. Aufgabe: 5 Röhren füllen einen Wasserbehälter in 16 Stunden; wie lange brauchen 4 Röhren dazu?

Ansatz:

Std. ?	4 Röhren
Röhren 5	16 Std.

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel Stunden brauchen 4 Röhren, wenn 5 Röhren 16 Stunden zur Füllung brauchen?

2. Aufgabe: Eine Summe Geldes wurde unter 8 Personen verteilt und jede erhielt 178 ℳ; wie viel würde sie aber bekommen haben, wenn dieselbe Summe unter 5 Personen verteilt worden wäre?

Ansatz:

(treffen auf 1 Perſ.)

ℳ ?	5 Perſ.
Perſ. 8	178 ℳ

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel ℳ treffen auf 1 Person, sobald die Summe unter 5 Personen verteilt wird (Fragesatz), wenn, sobald man dieselbe unter 8 Personen verteilt, auf 1 Person 178 ℳ kommen? (Bedingungssatz.)

Erläuterung des Ansatzes: Wir haben hier oben an die Spitze des Ansatzes den Zusatz

„treffen auf 1 Person“

geschrieben. Dieser Zusatz vervollständigt die Frage. Wenn wir ihn weglassen, erhält dieselbe einen anderen Sinn; sie bedeutet dann: wie viel erhalten 5 Personen? während doch nur nach einer gefragt ist. Unsere Klausel bezieht sich aber auch auf den Bedingungssatz; auch dieser sagt etwas ganz anderes, sobald man von jener absieht; denn er scheint dann auszudrücken, daß „auf 8 Personen 178 ℳ treffen“, während doch die 178 ℳ nur der Anteil von 1 Person sein sollen. Unser Zusatz wird endlich vor allem entscheidend für das dem Ansetzen unmittelbar folgende Schlußverfahren. Darum, weil er sich sowohl auf Frage- als Bedingungssatz bezieht und weil er besonders wichtig bei der Beurteilung und Feststellung des Lösungsganges ist, haben wir ihn an die Spitze unseres Divisionsstriches und in die Mitte geschrieben. Indem wir nun auf diese Weise das, was in der Rechnung ergänzt werden muß, aber weder in eines der links noch der rechts stehenden Glieder des Ansatzes gebracht werden kann, oben,

gleichsam zwischen die Zahlen einschalten, erhöhen wir die Brauchbarkeit und Leistungsfähigkeit der Reesischen Regel um ein Bedeutendes und machen sie noch weit vorzüglicher und praktischer, als sie schon ist.

3. Aufgabe: Gebe ich täglich 4,5 *M.* aus, so reicht mein Geld 18 Tage, wie viel darf ich aber täglich nur brauchen, um 20 Tage auszukommen?

Ansatz:

	(täglich)
M. ?	20 Tage
Tage 18	4,5 *M.*

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel *M.* darf ich „täglich" ausgeben, um 20 Tage zu reichen (Fragesatz), wenn ich bei 18 Tagen „täglich" 4,5 *M.* ausgeben darf? (Bedingungssatz.)

Erläuterung des Ansatzes: Lasse ich bei vorstehendem Ansatz die Klausel „täglich" weg, so bekommt derselbe einen ganz anderen Sinn. Er wäre dann zu lesen: „Wie viel *M.* brauche ich in 20 Tagen, wenn ich in 18 Tagen 4,5 *M.* brauche?" Unser Zusatz vervollständigt somit die Rechnung und macht dadurch erst die richtige Beurteilung derselben möglich. Fehlt er, so mangelt ein wichtiges Stück der Aufgabe.

B. Das Umwandeln des Reesischen Ansatzes in den Schlußsatz.

Diese Umwandlung geschieht durch logischen Schluß. Es wird dabei jedesmal bei dem untersten, links vor dem Divisionsstrich stehenden Glied begonnen, von da auf das gleichnamige Glied im Fragesatz gefolgert und auf diese Weise der ganze Ansatz von unten nach oben durchgearbeitet. So oft man durch Schluß ausgemacht hat, was mit einer Zahl geschehen muß, wird die vor oder hinter derselben sich befindende sachliche Bezeichnung durchstrichen. Soll eine Ziffer versetzt werden, was bei Aufgaben mit umgekehrtem Verhältnis regelmäßig der Fall ist, so durchstreicht man nicht bloß die Sachbenennung, sondern beides, Benennung und Ziffer, zugleich und schreibt dann die letztere auf die andere Seite.

Das Durchstreichen der Sachnamen im Ansatz hilft jeden Schluß markieren. Es läßt mir ersehen, wie weit ich in der Beurteilung und Zurechtlegung der Aufgabe gekommen bin, welche Glieder der Rechnung bereits abgefertigt sind, welche noch durch Schlußverfahren umgewandelt werden müssen, es beugt dadurch der Verwirrung der Gedanken wirksam vor und bringt Sicherheit und Methode in den Lösungsgang.

C. Die Berechnung der Aufgaben.

a) Gerades Verhältnis.

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
kg ?	17 *M.*	Wie viel kg erhält man um 17 *M.*,
M. 9	27 kg	wenn man um 9 *M.* 27 kg bekommt?

Umwandlung: Wenn man um 9 *M.* 27 kg erhält, so bekommt man um 1 *M.* den 9. Teil („*M.*" bei *M.* 9 wird durchstrichen) und um 17 *M.* 17 mal so viel (das „*M.*" bei 17 *M.* wird ebenfalls durchstrichen).

Berechnung: Man sieht zuerst, ob man kürzen kann. Kürzen lassen sich die Zahlen 9 und 27. 9 ist in 9 einmal; 9 ist in 27 dreimal. — Jetzt zieht man einen wagrechten Strich und vermehrt. — 3 mal 17 ist 51. Das Ergebnis 51 kg wird unterstrichen.

b) Umgekehrtes Verhältnis.

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
Tg. ?	4 Arb.	Wie viele Tage brauchen 4 Arbeiter,
Arb. 3	6 Tg.	wenn 3 Arb. 6 Tage brauchen?

Umwandlung in den Schlußsatz: Wenn 3 Arb. 6 Tage brauchen, so braucht 1 Arbeiter 3 mal so lang, also 3 mal 6 Tage („Arb. 3" wird durchstrichen und die Ziffer 3 auf die rechte Seite versetzt) und 4 Arb. brauchen den 4. Teil der Zeit, also wird mit 4 geteilt (der Ausdruck „4 Arb." wird durchstrichen und die 4 auf die Divisorenseite geschrieben).

Berechnung: Zuerst werden die möglichen Kürzungen vorgenommen, dann wird der horizontale Strich gezogen, um anzudeuten, daß der Ansatz beendet ist und die eigentliche Rechnung beginnt, hernach wird multipliziert oder dividiert und schließlich wird das Resultat wieder unterstrichen.

Ansatz:

(treffen auf 1 Pers.)

M. ?	5 Pers.
Pers. 8	178 *M.*

Umwandlung in den Schlußsatz: Wenn bei der Verteilung der Summe unter 8 Personen „auf 1 Person" 178 *M.* treffen, so würden, falls das Ganze einer einzigen Person zufiele, auf diese Person 8 mal 178 *M.* kommen (der Ausdruck „Pers. 8" wird durchstrichen und die 8 auf die rechte Seite geschrieben), da nun das Geld unter 5 Personen verteilt wird, so erhält eine Person nur den 5. Teil („5 Pers." wird durchstrichen und die Ziffer 5 versetzt).

Berechnung: Wie bei Beispiel 1 und 2. Zuletzt vollständige Beantwortung der Frage; Durchstreichung des Fragegliedes „*M.* ?" und des erklärenden Zusatzes an der Spitze des Divisionsstriches, nämlich des Ausdruckes „treffen auf 1 Person".

D. Die möglichen Varianten bei der schriftlichen Berechnung der Aufgaben.

Es dürfte in hohem Grade belehrend sein, den Schüler auf die sachliche oder logische Bedeutung der Kürzungen aufmerksam zu machen, es demselben also klar zu legen, daß es eine andere Lösung ist, ob ich die Glieder des Ansatzes gegenseitig kürze oder nicht, sowie daß jede mögliche Kürzung, im Grunde genommen, wiederum eine besondere Berechnungsweise vorstellt.

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
M. ?	45 m	Was kosten 45 m,
m 15	30 *M.*	wenn 15 m 30 *M.* kosten?

1. Lösungsvariante: Zuerst die ungleichnamigen Größen (15 m und 30 *M.*) kürzen, dann multiplizieren.

Logische Begründung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so kostet 1 m den 15. Teil von 30 *M.* oder 2 *M.* (durch das Kürzen der 15 m und 30 *M.* erhalte ich sonach den Preis für 1 m = 2 *M.*) und 45 m machen 45 mal so viel, also 90 *M.*

2. Lösungsvariante: Zuerst die gleichnamigen Größen (15 m und 45 m) kürzen, dann multiplizieren.

Logische Begründung: Nachdem 15 m 30 *M.* kosten, so kosten 45 m so oftmal 30 *M.*, als 15 m in 45 m enthalten sind. 15 ist in 45 dreimal, also u. s. w. Durch das Teilen (Kürzen) der 15 m und 45 m erhalte ich demnach die Enthaltenseinszahl (d. i. 3) und aus dieser durch Multiplikation erst den zu berechnenden Preis.

3. Lösungsvariante: Zuerst vermehren (also auf das Kürzen ganz verzichten), dann teilen.

Begründung der Lösung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so kostet das 45 fache von 15 m 45 mal 30 *M.* = 1350 *M.* und 45 m kosten den 15. Teil von 1350 *M.* = 90 *M.*

Das sind die drei wichtigsten und einfachsten Varianten, die bei der schriftlichen Lösung unserer Aufgabe statthaben können. Außer denselben vermögen wir aber noch eine Menge anderer, mehr oder weniger komplizierte, zu unterscheiden. Ich will auch von diesen einige folgen lassen.

4. Lösungsvariante: Kürzen der ungleichnamigen Größen (15 m und 30 *M.*) durch 5 (also der 5. Teil von 15 m sind 3 m, von 30 *M.* sind 6 *M.*), dann multiplizieren (45 mal 6 *M.* sind 270 *M.*) und zuletzt teilen (der 3. Teil von 270 *M.* = 90 *M.*).

Logische Begründung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so kosten 3 m den 5. Teil von 30 *M.*, d. i. 6 *M.* und das 45 fache von 3 m kostet 45 mal so viel, also 270 *M.* und der 3. Teil des 45 fachen oder 45 m = 90 *M.*

5. Lösungsvariante: Zweimaliges Kürzen der ungleichnamigen Größen (15 m und 30 *M.*), das erste mal durch 5 (der 5. Teil von 15 m sind 3 m, der 5. Teil von 30 *M.* sind 6 *M.*), das zweitemal durch 3 (der 3. Teil von 3 ist 1 und von 6 ist 2), zuletzt multiplizieren (45 mal 2 *M.* = 90 *M.*).

Begründung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so kosten 3 m 6 *M.*, 1 m 2 *M.* und 45 m 90 *M.*

6. Lösungsvariante: Kürzen der ungleichnamigen Größen (15 m und 30 *M.*) durch 5 (also, der 5. Teil von 15 ist 3 und von 30 ist 6), dann der gleichnamigen Größen (3 m und 45 m) durch 3 (3 in 3 ist 1 mal, 3 in 45 ist 15 mal), zuletzt multiplizieren (15 mal 6 *M.* sind 90 *M.*).

Begründung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so kosten 3 m 6 *M.* und das 15 fache von 3 m (d. i. 45 m) kostet 15 mal 6 oder 90 *M.*

7. Lösungsvariante: Kürzen der gleichnamigen Größen (15 m und 45 m) durch 3 (also, 3 ist in 15 fünfmal und in 45 fünfzehnmal), dann multiplizieren (15 mal 30 *M.* sind 450 *M.*) und zuletzt teilen (5 | 450 *M.* = 90 *M.*).

Begründung: 15 m kosten 30 *M.*; das 15 fache von 15 m kostet 450 *M.* und der 5. Teil des 15 fachen oder das 3 fache von 15 m (= 45 m) kostet natürlich auch bloß den 5. Teil von 450 *M.*, d. i. 90 *M.*

8. Lösungsvariante: Zweimaliges Kürzen der gleichnamigen Größen (15 m und 45 m) und zwar zuerst durch 3 (3 ist in 15 fünfmal und in 45 fünfzehnmal) und dann durch 5 (5 ist in 5 einmal und in 15 dreimal), zuletzt multiplizieren (3 × 30 *M.* = 90 *M.*).

Begründung: Wenn 15 m 30 *M.* kosten, so machen 45 m den 5. Teil von 15 mal 30 *M.*, d. i. 3 mal 30 oder 90 *M.*

9. Lösungsvariante: Kürzen der gleichnamigen Größen (15 m und 45 m) durch 5 (also, 5 ist in 15 drei- und in 45 neunmal), dann der ungleichnamigen (3 m und 30 *M.*) durch 3 (der 3. Teil von 3 ist 1 und von 30 ist 10) und zuletzt multiplizieren (9 × 10 *M.* = 90 *M.*).

Begründung: Nachdem 15 m 30 *M.* kosten, so müssen 5 m den 3. Teil davon und 45 m 9 mal so viel machen. Der 3. Teil von 30 *M.* ist 10 *M.* und 9 × 10 *M.* sind 90 *M.* Sonach kosten die 45 m genau 90 *M.*

2. Übung: Eines der Ansatzglieder hat einen Bruch.

1. Möglichkeit: Das letzte Glied des Bedingungssatzes mit Bruch.

Ansätze:

a)	Butter Pfd. ?	100 l Milch	b) ha ?	7 Bauplätze
	Milch l 6	$^3/_4$ Pfd. Butter	Baupl. 10	0,75 ha

Diese Brüche ($^3/_4$ Pfd. und 0,75 ha) können während der ganzen Berechnung unverändert beibehalten werden. Der Bequemlichkeit halber wird man aber, nachdem das Verhältnis der Zahlen durch Schluß erkannt, der Reesische Ansatz sonach in den Schlußsatz umgewandelt ist, die beiden Brüche in Divisionsform ansetzen. Man läßt dabei dem Schüler sagen: „$^3/_4$ Pfd. sind der 4. Teil von 3 Pfd., statt $^3/_4$ Pfd. kann ich also auch schreiben 3 Pfd. geteilt durch 4“ (der Ausdruck $^3/_4$ Pfd. wird durchstrichen und dafür 3 Pfd. auf die Multiplikatoren- und die Ziffer 4 auf die Divisorenseite geschrieben). Beim zweiten Ansatz würde er sich etwa folgendermassen auszudrücken haben: „75 hundertstel ha sind der 100. Teil von 75 ha; ich kann darum diese Größe auch so ansetzen: 75 ha (75 ha wird dabei auf die Multiplikatorenseite geschrieben und zugleich der Ausdruck „0,75 ha“ durchstrichen), davon den 100. Teil“ (die Ziffer 100 setzt man auf die linke Seite).

2. Möglichkeit: Eines der Zwischenglieder mit Bruch.

Ansätze:

a) ℳ ?	3 Ztr.		b) ℳ ?	0,25 Ztr.
Ztr. $^5/_8$	175 ℳ		Ztr. 2	25 $^4/_5$ ℳ

Umwandlung des ersten Ansatzes: Wenn $^5/_8$ Ztr. 175 ℳ kosten, so kostet $^1/_8$ Ztr. den 5. Teil, also wird mit 5 geteilt (dabei durchstreicht man die sachliche Bezeichnung „Ztr.“, sowie den Zähler $^5/$ und schreibt die Ziffer „5“ in gewöhnlicher Schrift darunter) und 1 Ztr. kostet 8 mal so viel (man durchstreicht den Nenner $/_8$ und setzt diese Ziffer auf die rechte Seite) und 3 Ztr. kosten 3 mal so viel u. s. f.

Umwandlung des zweiten Ansatzes: Der gemischte Bruch $25^4/_5$ ℳ wird vor allem eingerichtet, also in $^{129}/_5$ ℳ verwandelt; dann mag man diesem Bruche sogleich die Divisionsform geben, indem man sagt: $^{129}/_5$ ℳ sind der 5. Teil von 129 ganzen ℳ. Darauf beginnt das Schlußverfahren: Wenn 2 Ztr. den 5. Teil von 129 ℳ kosten, so kostet 1 Ztr. die Hälfte (die sachliche Bezeichnung „Ztr.“ wird durchstrichen) und $^1/_{100}$ Ztr. den 100. Teil („100“ wird auf die Divisorenseite geschrieben) und $^{25}/_{100}$ Ztr. 25 mal so viel (das Glied „0,25 Ztr.“ wird durchstrichen und die Zahl 25 darunter gesetzt).

3. Übung: Zwei oder drei Glieder des Ansatzes mit Bruch.

1. Fall: Die beiden Zwischenglieder haben Brüche und dieselben sind gleichnamig.

Ansätze:

ℳ ?	$^3/_8$ Ztr.		ℳ ?	0,7 m
Ztr. $^5/_8$	175 ℳ		m 0,3	25 $^4/_5$ ℳ

Diese Ansätze bedürfen keiner Erläuterung; ihre Umwandlung ist eine zu einfache; es wird dabei geschlossen von der Bruchzahl auf die Brucheinheit (also von $^5/_8$ auf $^1/_8$, von $^3/_{10}$ auf $^1/_{10}$) und von der Brucheinheit auf die andere Bruchzahl (von $^1/_8$ auf $^3/_8$ und von $^1/_{10}$ auf $^7/_{10}$).

2. Fall: Die beiden Zwischenglieder haben Brüche, dieselben sind aber ungleichnamig.

Ansatz:

M. ?	$^1/_2$ hl
hl $^1/_5$	36 *M.*

Umwandlung: Wenn $^1/_5$ hl 36 *M.* kostet, so kostet 1 hl 5 mal so viel (der Ausdruck „hl $^1/_5$“ wird gestrichen und die 5 auf die rechte Seite geschrieben) und $^1/_2$ hl kostet die Hälfte („$^1/_2$ hl“ wird gestrichen und der Divisor 2 auf die linke Seite gesetzt).

Aufgabe: Wie viel m legt ein Pferd in $^2/_3$ Minuten zurück, wenn es in $^7/_{10}$ Minuten $31^1/_2$ m weit kommt?

Ansatz:

m ?	$^2/_3$ Min.
Min. $^7/_{10}$	$31^1/_2$ m

Umwandlung: Für's erste muß der Bruch $31^1/_2$ m eingerichtet werden. Dann schließt man: In $^7/_{10}$ Minuten legt das Pferd $^{63}/_2$ m zurück; in $^1/_{10}$ Minute den 7. Teil, also wird mit 7 geteilt (dabei wird der Zähler $^7/$ gestrichen und als Divisor in großer Ziffer darunter geschrieben) und in 1 ganzen Minute 10 mal so viel (der Nenner $/_{10}$ wird gestrichen und als Multiplikator auf die rechte Seite gesetzt). — Nachdem Zähler und Nenner des unteren oder linken Zwischengliedes gestrichen sind, kommt der Bruch des oberen oder rechten Zwischengliedes ($^2/_3$ Minuten) daran. — Es wird geschlossen: In $^1/_3$ Minute legt das Pferd den 3. Teil zurück, also wird mit 3 geteilt (der Nenner $/_3$ wird darum durchstrichen und auf die Divisorenseite gesetzt) und in $^2/_3$ Minuten kommt es nochmal so weit (der Zähler $^2/$ wird gestrichen und als Multiplikator unten hingeschrieben).

(Anmerk.: Bei der Umwandlung wird demnach folgender Gang beobachtet: Vorerst streicht man den Bruch der linken Seite (unteres Zwischenglied) und zwar zuerst den Zähler und darauf den Nenner; dann streicht man den Bruch auf der rechten Seite und zwar zuerst den Nenner und hernach den Zähler. Dieses Verfahren ist bei allen derartigen Aufgaben das gleiche, es ist eine Regel und muß darum dem Schüler zum klaren Bewußtsein gebracht werden.)

Nachdem auf diese Weise festgestellt ist, was mit den Zahlen zu geschehen hat, werde ich die $^{63}/_2$ m aus der Bruchform in die Divisionsform umwandeln; ich werde sagen: „Statt $^{63}/_2$ m kann ich auch

schreiben: 63 m geteilt durch 2" und werde zugleich 63 m rechts und die Ziffer 2 links vom Divisionsstrich setzen.

3. Fall: Beide Zwischenglieder mit Dezimalbrüchen und zwar mit ungleichnamigen.

Ansatz:

₰ ?	0,75 m
m 0,6	48 ₰

Umwandlung: Man macht die Brüche der beiden Zwischenglieder vor allem gleichnamig, indem man an 0,6 m eine Null anhängt, und fängt dann zu schließen an: Wenn $^{60}/_{100}$ m 48 ₰ kosten, so kostet $^{1}/_{100}$ m den 60. Teil (dabei streicht man in dem Ausdruck „m 0,60" die Bezeichnung „m", die „0" Ganzen und das Dezimalkomma ab) und $^{75}/_{100}$ m kosten 75 mal so viel (es werden nun bei dem Ausdrucke „0,75 m" ebenfalls der Buchstabe „m", die „0" und das Dezimalkomma weggestrichen).

4. Fall: Das eine Zwischenglied mit einem Dezimal-, das andere mit einem gemeinen Bruch.

Ansatz:

ℳ ?	$184^{3}/_{4}$ m
m 72,5	304,50 ℳ

Umwandlung: Zunächst muß der gemischte Bruch $184^{3}/_{4}$ m eingerichtet, d. h. als $^{739}/_{4}$ m angeschrieben werden. Darauf hat man den Dezimalbruch „72,5 m" in der Form des gemeinen und zwar einfachen, also nicht etwa gemischten Bruches, d. i. als $^{725}/_{10}$ m darzustellen. Nun erst kann man mit der eigentlichen Umwandlung unseres Voransatzes in den Schlußsatz beginnen. — Wenn $^{725}/_{10}$ m 304 ℳ 50 ₰ kosten, so kostet $^{1}/_{10}$ m den 725. Teil, also wird mit 725 geteilt (Zähler $^{725}/$ wird gestrichen und als Divisor geschrieben) und 1 m kostet 10 mal so viel (der Nenner $/_{10}$ wird gestrichen und als Multiplikator auf die rechte Seite gesetzt), $^{1}/_{4}$ m kostet den 4. Teil (der Nenner $/_{4}$ im Ausdruck „$^{739}/_{4}$ m" wird wieder gestrichen und auf die Divisorenseite gebracht) und $^{739}/_{4}$ m kosten 739 mal so viel (der Zähler $^{739}/$ wird durchstrichen und als Multiplikator unten hin geschrieben).

4. **Übung:** Eines der Zwischenglieder des Ansatzes ist eine mehrfach benannte Zahl.

Ansätze:

a)	ℳ ?	3 Mt. 25 Tg.	b)	ℳ ?	1 Mt. 18 Tg.
	Mt. 1	132 ℳ		Tg. 15	70 ℳ

Umwandlung des ersten Ansatzes: Die mehrfach benannte Zahl 3 Mt. 25 Tg. wollen wir in die höhere Sorte (Monat) umwandeln, wir wollen also den ganzen Ausdruck (3 Mt. 25 Tg.) durch-

streichen und nebenan $3\frac{5}{6}$ oder gleich $\frac{23}{6}$ Mt. schreiben. Das Übrige ist leicht.

Umwandlung des zweiten Ansatzes: 1 Mt. 18 Tg. sind 48 Tg.; der ganze Ausdruck (1 Mt. 18 Tg.) wird gestrichen und nebenan 48 Tg. geschrieben. Die Berechnung macht nun keine Schwierigkeiten mehr.

Im ersten Ansatz haben wir die mehrfach benannte Zahl in der höheren Sorte (nämlich als Monate), im zweiten dagegen in der niedrigeren (nämlich als Tage) ausgedrückt.

---

2. Stufe: Verhältnisrechnungen mit einem mehrgliedrigen Bedingungssatze.

A. Das Ansetzen der Aufgabe

a) bei geradem Größenverhältnis.

Aufgabe: 14 Arbeiter verdienen in 8 Monaten, den Monat zu 24 Tagen und den Tag zu 10 Stunden gerechnet, 7280 *M.*; ? 24 Arbeiter in 5 Mt. à 25 Tg. à 12 Std.?

Ansatz:

Entweder so:

M. ?	24 Arb.
Arb. 14	5 Mt
Mt. 8	25 Tg.
Tg. 24	12 Std.
Std. 10	7280 *M.*

oder so:

M. ?	24 Arb.
	5 Mt.
	25 Tg.
	12 Std.
Arb. 14	
Mt. 8	
Tg. 24	
Std. 10	7280 *M.*

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel *M.* verdienen 24 Arb. in 5 Mt., den Mt. zu 25 Tg. und den Tg. zu 12 Std., wenn 14 Arb. in 8 Mt., den Mt. zu 24 Tg. und den Tg. zu 10 Std., 7280 *M.* verdienen? —

Zuerst werden also sämtliche Glieder des Fragesatzes und zwar (mit Ausnahme des ersten, „*M.* ?") auf die rechte Seite des Divisionsstriches vertikal unter einander und darauf die Zahlen des Bedingungssatzes auf die linke Seite (mit Ausnahme der letzten Größe „7280 *M.*", welche dem Fragglied „*M.* ?" gegenübergesetzt werden muß) geschrieben.

b) bei umgekehrtem Verhältnis.

Diese Aufgaben werden auf dieselbe Weise, wie jene mit geradem Verhältnis angesetzt. Nur muß man bei ersteren, wo es notwendig erscheint, einen ergänzenden Zusatz an die Spitze des Ansatzes schreiben.

Aufgabe: Ein Vorrat reicht für 80 Mann auf 6 Wochen, wenn jeder täglich 50 g erhält; wie viel darf der Mann täglich nur bekommen, wenn der Vorrat für 100 Mann 8 Wochen ausreichen soll?

Ansatz mit Ergänzung:

Entweder so: (täglich p. Mann)

g ?	100 Mann
Mann 80	8 Wochen
Wochen 6	50 g

oder so: (täglich p. Mann)

g ?	100 Mann
	8 Wochen
Mann 80	
Wochen 6	50 g

Sprechweise beim Ansetzen: Wie viel g treffen „täglich p. Mann“, sobald der Vorrat für 100 Mann auf 8 Wochen ausreichen soll, wenn, falls derselbe von 80 Mann in 6 Wochen verzehrt werden darf, „täglich per Mann“ 50 g kommen?

B. Das Umwandeln und Berechnen der Aufgabe.

Bei Rechnungen mit zusammengesetztem Verhältnis fängt man immer beim obersten Glied des Bedingungssatzes (also in vorstehenden Aufgaben bei 14 Arbeiter, bei 80 Mann) zu schließen an und folgert von da auf das gleichnamige Glied im Fragesatz hinüber.

a) Umwandlung unseres ersten Ansatzes (Aufgabe mit geradem Größenverhältnis): Wenn 14 Arb. 7280 *M.* bekommen, so 1 Arb. den 14. Teil (die Bezeichnung „Arb.“ wird gestrichen) und 24 Arb. 24 mal so viel (die Benennung „Arb.“ wieder durchstrichen); wenn sie 7280 *M.* für 8 Mt. erhalten, so für 1 Mt. den 8. Teil (die sachliche Bezeichnung „Mt.“ wird gestrichen) und für 5 Mt. 5 mal so viel; wenn sie dies bekommen für monatlich 24 Tage, so für einen Tag den 24. Teil und für monatlich 25 Tage 25 mal so viel; wenn das der Lohn ist für täglich 10 stündige Arbeit, so beträgt jener für 1 Stunde den 10. Teil und der für 12 Stunden 12 mal so viel.

b) Umwandlung unseres zweiten Ansatzes (Aufgabe mit umgekehrtem Größenverhältnis): Wenn bei 80 Mann täglich 50 g auf den einzelnen Mann kommen, so kommt bei nur 1 Mann auf ihn 80 mal so viel (das Glied „Mann 80“ wird durchstrichen und die Zahl 80 auf die Multiplikatorenseite gesetzt) und bei 100 Mann der 100. Teil („100 Mann“ durchstrichen und 100 auf die linke Seite geschrieben). Wenn das bei 6 Wochen täglich für 1 Mann abfällt, so würde, sobald der Vorrat in 1 Woche aufgezehrt werden dürfte, 6 mal so viel auf den Mann treffen und bei 8 Wochen der 8. Teil (die beiden Glieder des Ansatzes „Wochen 6“ und „8 Wochen“ werden gestrichen und ihre Ziffern auf die entgegengesetzten Seiten geschrieben).

3. Stufe: Verhältnisrechnungen mit mehreren Bedingungssätzen.

Die Größe des Resultates einer Verhältnisaufgabe hängt ab vom Fragesatz und nur einem Bedingungssatz. Sind nun in einer Rechnung mehrere Bedingungssätze vorhanden, so vermag nur einer derselben das Ergebnis wirklich, d. h. der Größe, der Quantität nach zu beeinflußen, die übrigen dagegen dienen bloß dem Zwecke der Umrechnung. Diese letztere kann sowohl in besonderen Nebenrechnungen besorgt, als auch, was jedenfalls praktischer ist, in unserm Ansatze, der dadurch zum sogenannten Kettensatze wird, selbst ausgeführt werden.

Nicht alle Bedingungssätze haben also die gleiche Bedeutung. Es gibt solche, welche die Größe des Resultates unmittelbar bestimmen und sonach ungemein wichtig und entscheidend sind und wieder andere, welche eine mehr untergeordnete Rolle spielen. Je nach der verschiedenen Funktion, die der Bedingungssatz übt, sowie nach der Stelle, die er im Ansatz einnimmt, unterscheiden wir dreierlei:

1. eigentliche Bedingungssätze. Durch dieselben wird die Größe des Ergebnisses bestimmt. Jede Aufgabe kann nur einen einzigen derartigen Satz haben.

2. Zwischensätze. Sie schieben sich zwischen den Frage- und den eigentlichen Bedingungssatz ein und vermitteln zwischen beiden dadurch, daß sie die Sorten in einander verwandeln. Ihre Aufgabe ist somit die Umrechnung, die Sortenverwandlung.

3. Nachsätze. Dieselben verbinden das letzte Glied des Bedingungssatzes mit dem ersten des Fragesatzes und sind sonach ebenfalls Zwischensätze, obschon sie in unserem Rechenansatz zu unterst zu stehen kommen und gleichsam den Nachtrab, die arrière-garde bilden.

1. Fall: Aufgabe mit Zwischensätzen (die Kette schließt sich an ein Mittelglied des Ansatzes an).

Beispiel: 3 Groß kosten 432 *M.*, ? 6 Stück.

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
M. ?	6 Stck.	Was kosten 6 Stück (Fragesatz),
Stck. 12	1 Dtz.	wenn 12 Stck. 1 Dtz. (1. Zwischensatz)
Dtz. 12	1 Grß.	und 12 Dtz. 1 Groß sind (2. Zwischensatz)
Grß. 3	432 *M.*	und 3 Groß 432 *M.* kosten (Bedingungss.)?

Umwandlung durch Schluß: Es wird beim untersten Glied begonnen. Wenn 3 Groß 432 *M.* kosten, so kostet 1 Groß den 3. Teil von 432 *M.*, also wird mit 3 geteilt; und wenn 12 Dtz. = 1 Groß sind, so kostet 1 Dtz. den 12. Teil, darum wird mit 12 geteilt; und wenn 12 Stck. = 1 Dtz. sind, so kostet 1 Stck. den 12. Teil von dem, was 1 Dtz. kostet, deshalb wird wieder mit 12 geteilt; und 6 Stck. kosten 6 mal so viel als 1 Stck., darum wird mit 6 vermehrt.

2. Fall: Aufgabe mit Nachsätzen (die Kette schließt sich an das Endglied des Bedingungssatzes an).

Beispiel: 1000 Stück kosten 1200 fr., wie viele Dollar kosten dann 2500 Stück, wenn 5 fr. = 4 ℳ und 30 ℳ = 7 Dollar sind?

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
Doll. ?	2500 Stck.	Wie viel Dollar kost. 2500 Stck. (Frages.),
Stck. 1000	1200 fr.	wenn 1000 Stck. 1200 fr. k. (Bedingungss.)
fr. 5	4 ℳ	und 5 fr. = 4 ℳ (1. Nachsatz)
ℳ 30	7 Doll.	und 30 ℳ = 7 Dollar sind (2. Nachsatz)?

Umwandlung des Ansatzes: Man fängt wieder bei dem untersten Gliede an. Wenn 30 ℳ = 7 Dollar sind, so ist 1 ℳ der 30. Teil von 7 Dollar oder $^7/_{30}$ Dollar, man verwandelt also die ℳ in Dollar, indem man die Anzahl der ℳ $^7/_{30}$ mal nimmt, d. i. durch 30 teilt und mit 7 vermehrt; und wenn 5 fr. = 4 ℳ sind, so ist 1 fr. der 5. Teil von 4 ℳ oder $^4/_5$ ℳ, man verwandelt daher die fr. in ℳ, indem man die Anzahl der fr. $^4/_5$ mal nimmt, d. i. durch 5 teilt und mit 4 vermehrt; und wenn 1000 Stück 1200 fr. kosten, so kostet 1 Stück den 1000. Teil und 2500 Stück kosten 2500 mal so viel.

3. Fall: Die Aufgabe hat sowohl Zwischen- als Nachsätze.

Beispiel: 1 hl Wein kostet, incl. Steuer, 84 östr. Gulden; wie viel ℳ kosten demnach 280 Flaschen, wenn 6 l = 7 Flaschen gerechnet werden und 1 östr. Gulden = 2 ℳ ist?

Ansatz:		Sprechweise beim Ansetzen:
ℳ ?	280 Flasch.	Was kosten 280 Flaschen (Fragesatz),
Flaschen 7	6 l	wenn 7 Flaschen 6 l sind (Zwischensatz)
l 100	84 östr. fl.	und 100 l 84 östr. fl. kosten (Bedingungss.)
östr. fl. 1	2 ℳ	und 1 östr. fl. = 2 ℳ ist (Nachsatz)?

Umwandlung des Ansatzes: Wenn 1 östr. fl. = 2 ℳ ist, so sind 84 östr. fl. 84 mal 2 ℳ, und wenn 100 l 84 östr. fl. kosten, so kostet 1 l den 100. Teil und 6 l kosten 6 mal so viel, und wenn 7 Flaschen 6 l sind, so kostet 1 Flasche den 7. Teil von dem, was 6 l kosten und 280 Flaschen kosten 280 mal so viel.

Dritter Gegenstand: Die Prozentrechnung.

Die Prozent- und Promillerechnung ist das Ausmessen verschiedener Zahlen und Zahlenverhältnisse durch einerlei Zahl, nämlich durch die 100 oder 1000. Von dieser Rechenart muß die „Zinsrechnung“ unterschieden werden, welche zwar ebenfalls nicht selten „Prozentrechnung“ genannt wird, aber in Wirklichkeit zu den Ver-

hältnisrechnungen gehört. Heißt ja doch die Regel, die wir bei ihr befolgen: So oftmal 100, so oftmal der Zinsfuß. In dem Grade als das Kapital zunimmt, muß auch der Zins anwachsen und in dem Verhältnis als jenes abnimmt, muß sich auch dieser verringern.

Beispiel: 400 M. zu 4%, wie viel Zins? — Lösung: Bei 100 M. Kapital 4 M., darum bei 400 M. 4 mal 4 oder 16 M. Zins.

Die eigentliche Prozentrechnung dagegen lautet: Für 400 M. Kapital bekomme ich 16 M. Zins, wie viel % also? — Lösung: Bei 400 M. macht es 16 M. Zins, bei 100 M. den 4. Teil, also 4 M. oder 4%.

Aber ist dies nicht auch Verhältnisrechnung? Wenn sich Verhältnisaufgaben und bloße Prozentbestimmungen, wie ich behauptet habe, wirklich von einander unterscheiden, worin besteht dann dieser Unterschied?

Ich glaube die richtige Antwort darauf geben zu können.

1. Bei Verhältnisrechnungen müssen die verschiedenen Größen in einem *sachlichen Zusammenhang* stehen, muß das Anwachsen der einen Zahl (Sache) notwendig das Zu- oder Abnehmen der anderen zur Folge haben. Die Glieder einer Prozent- oder Promillerechnung hingegen brauchen nicht sachlich oder real verknüpft zu sein. Zur Begründung dieser Behauptung wollen wir nachstehendes Rechenbeispiel genauer betrachten.

Unter 3420 Sterbefällen sind 6 Cholerafälle, also wie viel %?

Die Ursachen, welche die 3420 Todesfälle bewirkten, stehen unter sich in keinem erkannten gesetzmäßigen Zusammenhang, in keinem realen Verhältnis. Es ist durchaus nicht notwendig, daß in dem Maße als die Sterblichkeit überhaupt zurückgeht, auch die Choleraerkrankungen seltener werden müßten und daß umgekehrt in dem Verhältnis, in welchem sich die Todesfälle mehren, auch die Choleraopfer häufiger würden; es könnte vielmehr genau das Gegenteil stattfinden. Der Schluß, den wir bei der Lösung unseres Exempels ziehen und der also lautet: Wenn auf 3420 Sterbefälle 6 Cholerafälle kommen, so trifft auf einen Sterbefall der 3420. Teil von 6 und auf 100 hundertmal so viel, ist hypothetisch. Die Berechnung einer derartigen Aufgabe hat auch nicht eigentlich den Zweck, Thatsächliches festzustellen (denn das Faktum, daß unter 3420 Todesfällen 6 Cholerafälle sind, war ja schon *vor* der Prozentbestimmung bekannt), sie soll nur die in der ganzen Anzahl von Sterbefällen enthaltenen wenigen Choleraopfer in ihrem Verhältnis zur 100 ausmessen und dadurch Material beschaffen zu einer Vergleichung der gegenwärtigen Epidemie mit jenen früherer Jahre, so daß man daraus bestimmen kann, ob die gefürchtete Seuche damals *verhältnismäßig* mehr oder weniger Opfer verlangte als heutzutage. — Die Resultate der Prozentberechnung haben in der

Regel nur die Bedeutung von Durchschnittszahlen, nicht jene von absoluten streng giltigen Werten und von völlig genauen Größenangaben.

2. Das Ergebnis der Verhältnisrechnung unterscheidet sich aber auch noch in einer anderen Beziehung von dem Resultat der Prozentbestimmungen. Die Verhältnisrechnung führt nämlich zu Zahlen, die den vollständigen Preis einer Ware, den ganzen Gewinn eines Unternehmens, die ganze Dauer einer Arbeit rc., also nicht bloß einen Teil des Preises, einen Teil des Gewinnes u. s. f. angeben. In den Prozentbestimmungen dagegen habe ich nie die ganze, die vollständige Zahl einer Sache vor mir, sondern nur immer den Teil, der auf 100 trifft.

1. Stufe: Die reine Prozentrechnung.

1. Übung: Prozentbestimmung an gegebenen ganzen Zahlen.

Beispiel: A wird im Gehalt von 1500 M. auf 1950 M. erhöht, um wie viel %?

2. Übung: Die Bruchteile eines Ganzen werden in Prozentsätze verwandelt und umgekehrt.

Beispiel: A verliert durch eine Seuche den 5. Teil seiner Schafherde, wie viel % also?

---

2. Stufe: Verhältnisrechnungen mit Prozentbestimmungen.

1. Übung: Zinsrechnung. — Die Zinsen werden gesucht.

Beispiel: 950 M. zu $4\frac{1}{2}$%, wie viel Zins?

2. Übung: Zinsrechnung. — Der Zinsfuß wird gesucht.

Beispiel: Zu welchem Zinsfuß sind 360 M. ausgeliehen, wenn man in $3\frac{3}{4}$ Jahren 47,25 M. Zins erhält?

3. Übung: Zinsrechnung. — Zeit oder Kapital wird gesucht.

4. Übung: Rabattrechnung.

III. Abschnitt.

Kurs des praktischen Rechnens oder die Neugestaltung des Rechenunterrichtes im 6. und 7. Schuljahre.

Gegenstand: Das Rechnen des praktischen Lebens.

Ziel: Gewandtheit in der richtigen Beurteilung und Berechnung praktischer Aufgaben.

Stufengang:

I. Hauptstufe: Von der bürgerlichen Haushaltung und vom Kleingewerbe (6. Schuljahr).

II. Hauptstufe: Vom Verkehr, vom Handel, von der Großindustrie und vom Staatshaushalt (7. Schuljahr).

Das sechste Schuljahr.

Übersicht.

Ausgangspunkt und Centrum für das Rechnen im sechsten Schuljahr: Das Verzeichnis der Preise und Löhne.

Lehrgang:

1. Stufe: Von den Ausgaben für den Haushalt (Haushaltungsrechnung).
    1. Gegenstand: Ausgaben für Nahrungsmittel (Küchenrechnung ꝛc.).
    2. Gegenstand: Ausgaben für Bekleidung (Schuster-, Schneiderrechnung ꝛc.).
    3. Gegenstand: Ausgaben für Wohnung, Wohnungsgeräte, Bücher, Luxusgegenstände ꝛc.
    4. Gegenstand: Gesamtausgaben einer einzelnen Person.
    5. Gegenstand: Gesamtausgaben einer Familie.

2. Stufe: Von der Rechnungsstellung des Geschäftsmannes (Handwerkers).
   1. Gegenstand: Konto für gelieferte Arbeiten oder Waren (Guthaben, Einnahmen).
   2. Gegenstand: Konto für empfangene Rohmaterialien ꝛc. (Schulden, Ausgaben).

3. Stufe: Von der gewerblichen Buchführung.
   1. Gegenstand: Tagebuch.
   2. Gegenstand: Kassabuch.
   3. Gegenstand: Haupt- oder Kundenbuch.

Preise und Löhne
geordnet nach den verschiedenen Berufsarten und Handwerken.

Dieses Verzeichnis ist dem Schülerbuche vorzudrucken und hat den Ausgangs- und Mittelpunkt sämtlicher Rechenübungen unseres Schuljahres zu bilden. Die Preise müssen von den Kindern selbst nach Angabe des Lehrers eingeschrieben werden.

I. Die Berufsarten und Handwerke, welche für Beschaffung der Nahrungsmittel sorgen.

1. Der Bauer

braucht an Gerätschaften

Pflüge, Preis:
Eggen, „
Dreschmaschinen, „
Sensen à
Sicheln à
ꝛc. ꝛc.

an Zugtieren:

Pferde, Preis:
Ochsen, „

an Dienstboten:

Knechte, jährlicher Lohn:
Mägde, „ „

bearbeitet:

Ackerboden, das Tagwerk zu:
Wiesenboden, „ „ „
Moorboden, „ „ „
Waldboden, „ „ „

erzeugt:

Korn, das Hektoliter zu
Weizen, „ „ „
Gerste, „ „ „
Haber, „ „ „
u. s. w.

Tauben, Preis:
Hühner, „
Enten, „
Gänse, „
Schafe, „
Ziegen, „
Schweine, „
Kälber, „
Kühe, „
2c. 2c.

Eier, Preis:
Milch, „
Butter, „
Schmalz, „
Käse, „
2c. 2c.

Fichtenholz, per Ster:
Buchenholz, „ „
Torf, per 100 Stück:
2c. 2c.

2. Der Gärtner

braucht an Gerätschaften:

Rechen, Preis:
Schaufeln, „
Häuel, „

an Erden, Samen 2c.

Humus, Preis per Fuhr:
Mergel, „ „ „
2c. 2c.

bearbeitet

den Gartenboden, Preis per Dezimal:

erzeugt

Blaukraut, Preis:
Wirsing, „
2c. 2c.

verlangt

für das Umgraben eines Gartens per Dezimal:
für einen Tag Arbeit:

(In derselben Weise werden noch der Müller, Bäcker, Krämer, Metzger, Fischer und Wirt abgehandelt. Das Erste sind dabei immer die Preise für die erforderlichen Geräte, das Zweite jene für die zu verarbeitenden Rohstoffe 2c., das Dritte die für die Erzeugnisse, das Vierte und Letzte endlich sind die Löhne für einzelne besondere Leistungen. — Ein eifriger und tüchtiger Lehrer kann sich unmöglich damit begnügen, nur die Namen für die Werkzeuge, Rohprodukte 2c. ablesen und dann die in loco geltenden Preise hinaus notieren zu lassen; er wird den Schülern kurz erklären, wozu man jedes der angeführten Geräte braucht, was mit den Materialien alles geschieht, auf welche Weise die Erzeugnisse zustande kommen.

Unser Verzeichnis gibt sonach Gelegenheit zu den mannigfaltigsten sachlichen Erläuterungen. Ja, ich würde sogar wünschen, daß man einen eignen Anschauungsunterricht daran anreihen und Bildertafeln gebrauchen oder zum mindesten die wichtigeren Werkzeuge 2c. durch einige Striche an der Wandtafel verdeutlichen möchte.)

II. Die Berufsarten und Handwerke, welche für den Bau und die Einrichtung der Wohnung sorgen.

1. Der Maurer
   braucht an Gerätschaften:
      Kelle, Preis:
      Hammer, „
      2c. 2c.
   verarbeitet an Material:
      Ziegelsteine, per 1000 Stück:
      Kalk:
      Zement:
   verlangt
      als Arbeitslohn per Tag:
2. Der Zimmermann
   braucht an Geräten 2c.
   verarbeitet 2c.
   verlangt als Taglohn 2c.

(In gleicher Weise und Reihenfolge sind auch die Werkzeuge, Materialien, Erzeugnisse, Arbeitslöhne der übrigen Handwerker, die beim Hausbau oder bei der Einrichtung der Wohnung zu thun haben — Schreiner, Glaser, Hafner, Schlosser, Dachdecker, Spengler, Anstreicher, Tapezierer 2c. — aufzuführen.)

III. Berufsarten und Handwerke, welche für die Bekleidung sorgen.

(Da die Anordnung des Stoffes für alle Handwerke, die wir in unser Verzeichnis aufnehmen müssen, die nämliche sein wird, so will

ich mich darauf beschränken, einige von ihnen, die unter vorstehende Rubrik einzureihen wären, zu nennen):

1. Der Leinweber,
2. Der Weißwarenhändler,
3. Der Tuchmacher,
4. Der Kurzwarenhändler und Posamentierer,
5. Der Schneider,
6. Der Gerber,
7. Der Schuhmacher,
8. Der Hutmacher,
9. Der Kürschner und Säckler.

IV. Berufsarten und Handwerke, welche die Einrichtung der Wohnung vervollständigen.

1. Drechsler,
2. Uhrmacher,
3. Zinngießer,
4. Glaser und Vergolder,
5. Schäffler,
6. Messerschmied,
7. Kupferschmied,
8. Bürstenbinder,
9. Wachszieher und Seifensieder.

V. Berufsarten und Handwerke, welche für die Befriedigung der übrigen Lebensbedürfnisse, sowie für die Herstellung der Werkzeuge sorgen.

1. Schreibmaterialienhändler,
2. Buchbinder,
3. Optiker,
4. Seiler,
5. Wagner,
6. Büchsenmacher,
7. Huf- und Nagelschmied.

u. s. f.

Aus unserm skizzenhaften Entwurfe schon ergibt sich, wie reichhaltig unser Verzeichnis werden muß. Es versteht sich nun von selbst, daß nicht für jeden einzelnen Gegenstand der Preis ausgesetzt werden kann. Der Lehrer wähle aus dem Inhalte des Verzeichnisses eben aus, was für seine Schule, was für den Ort, in welchem er wirkt, passend ist. Alles Übrige mag er stillschweigend übergehen oder nur mit wenigen Worten besprechen. Welchen Wert hätte es auch, wenn wir dem Stadtkinde sagen würden, was ein Pflug, eine Egge, eine Dreschmaschine u. s. w. kostet? Welches Interesse kann es an diesen

Dingen haben? — Wenn wir nun unser Preisverzeichnis so umfangreich anlegen, so geschieht es aus dem Grunde, weil es den verschiedensten Verhältnissen Rechnung tragen, weil es Stadt- wie Landschulen in gleicher Weise berücksichtigen, weil es sich allen möglichen Bedürfnissen anpassen soll. Trotzdem dürften auf demselben einzelne Handwerke, Berufsarten 2c. nicht genannt sein, welche dennoch für bestimmte Orte von höchster Wichtigkeit sind, ja vielleicht deren Haupteinnahmsquellen ausmachen. Diese Industriezweige nun müssen von dem Schüler nachgetragen werden. Und das Rechenbuch hat zu diesem Zwecke leeres Papier zu enthalten. Nur so paßt sich unser Verzeichnis ganz und gar den bestehenden örtlichen Verhältnissen an. — Indem wir vom Lehrer fordern, er solle sich eingehend nach den Marktpreisen erkundigen und solle selbst den Nachbar Schmied oder Schlosser befragen, was sie für Reparaturen 2c. im Durchschnitt verlangen, halsen wir ihm freilich ein hübsches Stück Arbeit auf, aber die Mühe, die Anstrengung, der er sich dabei unterzieht, ist eine segensvolle und trägt ihren Lohn in sich selbst.

Unabhängig von der Bedeutung, welche unser Preiseverzeichnis für den Rechenunterricht hat, besitzt dasselbe noch einen hohen Wert für das praktische Leben. Der Schüler wird

1. bekannt gemacht mit den Berufsarten seiner Heimat,

2. lernt er kennen, was die verschiedenen Werkzeuge, Rohprodukte, Fabrikate 2c. in Wirklichkeit kosten,

3. lernt er Interesse fassen für die Beschäftigungen der Erwachsenen und gewöhnt sich daran, die Dinge nach ihrem wahren Werte zu beurteilen,

4. wenn die Notwendigkeit an ihn herantritt, sich einen Beruf zu wählen, so greift er nun nicht mehr blind zu, er hat auf Grund unseres Sachverzeichnisses, sowie der Belehrungen und Erörterungen, welche der Lehrer daran reihte, so viel Einblick in Leben und Verkehr gewonnen, um sich für jenes Gewerbe oder Handwerk entscheiden zu können, das seinen Neigungen am meisten entspricht,

5. werden die Preisnotierungen, welche der Schüler unter unserer Anleitung macht, für ihn ein immer frisches Interesse behalten bis in's Greisenalter. In den ersten Jahren nach dem Schulaustritt mögen sie ihm zur Orientierung über die Warenpreise und Arbeitslöhne dienen. Später aber werden sie ihn erinnern an die Verhältnisse und Zustände während der Kinderzeit, sie werden es ihm dann ermöglichen, Parallelen zu ziehen zwischen der gegenwärtigen Lebenslage und der früheren, zwischen jetzt und vormals.

Schließlich sei bemerkt, daß die Gegenstände unseres Verzeichnisses partienweise besprochen werden müssen und daß, sobald irgend ein größerer oder kleinerer Teil desselben behandelt ist, unmittelbar darauf Uebungen im Rechnen und zwar mit jenen Dingen und Werten,

welche unser Schüler soeben kennen gelernt hat, zu folgen haben. Diese Übungen sind entweder freie, vom Rechenbuche unabhängige, die Beispiele werden dabei vom Lehrer, resp. von den Schülern erfunden, oder sie bestehen in der Lösung des in der gedruckten Aufgabensammlung gebotenen Materials. Die erstere Art von Übungen will ich in Kürze illustrieren.

Angenommen, im Verzeichnis stünde „Pferd“, das Kind habe als Preis notiert „300 *M.* — 1 500 *M.*“. Der Lehrer gibt nun zur Berechnung auf: Von drei Pferden kostet das eine 750 *M.*, das andere 1010 *M.*, das dritte 1 035 *M.*, was kosten sie zusammen? — Jemand tauscht ein Pferd, das 1 025 *M.* gekostet hat, gegen ein anderes aus und zahlt noch 475 *M.* darauf, was ist das zweite Pferd wert? — Ein Kavalleriepferd kostet durchschnittlich 800 *M.*, was kosten 40, 320, 137 Pferde? — Dann fordert er seine Schüler auf, selbst ähnliche Beispiele zu erfinden und sich gegenseitig aufzugeben; er fragt etwa: Wer von euch weiß eine andere Aufgabe? — Wer kann noch eine Rechnung erdichten? — Wer will sie machen? u. s. w.

Ich bin überzeugt, daß diese Übungen den Kindern viel Freude bereiten und daß sie außerdem in hohem Grade die Selbstthätigkeit anregen und die Lernlust wecken und steigern werden.

Aufgabensammlung für das 6. Schuljahr.

Was endlich die Aufgabensammlung, welche unserm Schüler in die Hand gegeben werden soll, anbelangt, so stelle ich an dieselbe folgende Anforderungen:

1. Sie muß auf Schreibpapier gedruckt sein, denn es sind die verschiedensten Einträge und zwar, da das Gesudel mit Bleistift unmöglich geduldet werden darf, mit Tinte zu machen.

2. Den gesamten Übungsstoff hat sie auf drei Abschnitte zu verteilen.

I. Abschnitt: Von den Ausgaben zur Bestreitung des Haushaltes.
II. Abschnitt: Von der Rechnungsstellung des Geschäftsmannes.
III. Abschnitt: Von der gewerblichen Buchführung.

3. Jedem dieser drei Teile müssen sachliche Belehrungen vorgedruckt werden, also dem ersten „Das Wichtigste vom geregelten Haushalt“, dem zweiten „Einiges über die schriftliche Form der Konto, über die Quittierung derselben u. s. w.“, dem letzten endlich eine kurze „Beschreibung der notwendigsten Geschäftsbücher“.

4. Die Aufgaben unserer Sammlung haben zweierlei Art zu sein
a) Musterbeispiele,
b) Anleitungen zum Nachbilden, sowie zum selbständigen Erfinden von Rechenexempeln.

5. Diese Aufgaben dürfen wohl die genaue Bezeichnung der Sachen, sowie die Angabe der Stückzahl ꝛc. enthalten, nicht aber die

Preise. Letztere müssen von den Schülern mit Hilfe ihres Verzeichnisses eingetragen werden. Unsere Rechenbeispiele sind also unvollständig gelassen und bedürfen darum einer Ergänzung. Aber eben diese Lückenhaftigkeit ist ein wesentlicher Vorzug; sie macht es uns möglich, die Aufgaben ganz und gar den lokalen Verhältnissen, den thatsächlichen Marktpreisen anzupassen.

6. Musterbeispiele müssen in genügender Menge gegeben sein. So hat unser Buch eine Reihe der verschiedensten Haushaltungsrechnungen vorzuführen und zwar: a) Ausgaben einer einzelnen Person, b) einer Familie, c) bestimmte Spezialisierungen der Haushaltungsrechnung, wie Küchenrechnung, Schneiderrechnung ꝛc. Diese Aufgaben müssen zunächst vervollständigt werden dadurch, daß der Schüler die Preise einsetzt. Dann sind sie zu berechnen, darauf nachzuahmen, nachzubilden. Zuletzt muß, wie bereits angedeutet wurde, das Kind selbst derartige Rechnungen erfinden und zwar werden ihm dabei gewisse Bedingungen gestellt: so und so viel monatliche Einnahme, diese bestimmten Bedürfnisse, z. B. ein neuer Anzug, ein neues Paar Stiefel ꝛc., Befolgung des Grundsatzes, daß die Ausgaben die Einnahmen nicht überschreiten dürfen u. s. w. Dadurch wird es zum Kalkulieren, zum Vergleichen und Abwägen der Größen gezwungen. Es muß zwischen den möglichen Ausgaben (Preisen ꝛc.) wählen und darf, wenn ein geringes Einkommen vorausgesetzt ist, sich nicht für die teurere Ware entscheiden. Die goldene Regel, daß die Ausgaben den Einnahmen genau entsprechen müssen, wird ihm auf diese Weise zum klarsten Bewußtsein gebracht und zugleich unverlierbar dem Gedächtnis eingeprägt.

Bei der Haushaltungsrechnung handelt es sich vorzugsweise um Ausgaben; es ist also nur eine Seite des Lebens in's Auge gefaßt und die Aufgaben sind deshalb sehr einfach.

Schwieriger gestaltet sich der Rechenstoff unseres zweiten Teiles: Rechnungsstellung des Geschäftsmannes. Hier sind vor allem Einnahmen oder wenigstens Guthaben zu berechnen. Die Ausgaben der Menschen gleichen sich im Ganzen. Es sind allenthalben die nämlichen Bedürfnisse, welche befriedigt werden müssen (Wohnung, Kleidung, Nahrung). Bei den Einnahmen (Guthaben) dagegen haben wir es mit der größten Mannigfaltigkeit zu thun. Es tritt dabei, da dieselben das Erträgnis für geleistete Arbeiten oder für gelieferte Waren sind, notwendig eine Spezialisierung nach Berufsklassen und Beschäftigungen ein. Wir müssen unterscheiden die Rechnungsstellung des Schneiders, des Schuhmachers, des Glasers, des Schlossers, des Krämers u. s. f. Unsere Sammlung hat von jeder wichtigeren Art mindestens ein Beispiel zu enthalten. Was nun das Nachbilden und Erfinden von Aufgaben auf unserer 2. Stufe betrifft, so wird es gut sein, wenn wir jedem Schüler selbst ein bestimmtes Handwerk, etwa das seines

Vaters wählen und mehrere Wochen oder Monate hindurch beibehalten lassen. Der eine mag nichts als Schneiderrechnungen, ein anderer nichts als Glaserrechnungen u. s. w. ausstellen. Das bringt Wechsel, Frische, Leben in den Unterricht und macht frühzeitig praktisch und selbständig.

Der dritte Teil (Gewerbliche Buchführung) vervollständigt das Bild des geschäftlichen Lebens. Sämtliche Einnahmen und Ausgaben des Handwerkers oder Gewerbsmannes werden nunmehr verzeichnet und berechnet. Unser Aufgabenbuch wird zwar nur ein einziges Musterbeispiel durch die drei wichtigsten Bücher (Tage-, Kassa- und Kundenbuch) hindurchgeführt bringen können, aber dieses eine wird genügen, dem Kinde eine beiläufige Vorstellung von einem geordneten Geschäftsgange zu geben. — Welches sind nun die Rechenübungen auf unserer dritten und letzten Stufe? Antwort: 1. Einschreiben der Preise, also Vervollständigung unseres Musterbeispiels und 2. Berechnen desselben. — Das dürfte hinreichend sein. — Man kann dem Volksschüler unmöglich zumuten, einen komplizierten Geschäftsgang nachzubilden oder gar zu erfinden.

7. Außer den Musterbeispielen und Anleitungen zum Nachbilden derselben muß unsere Sammlung noch eine Fülle von Additions-, Multiplikations-, Subtraktions- und Divisionsaufgaben und zwar in unbenannten oder einfach benannten Zahlen enthalten. Zweck derselben ist, den Schüler im mechanischen Rechnen, d. i. in der bloßen Gewandtheit oder Fertigkeit zu üben. Das Kopfrechnen dagegen braucht nicht besonders, d. h. als eigener Gegenstand behandelt zu werden. Wir haben es vielmehr mit der schriftlichen Lösung der Aufgaben in Verbindung zu bringen, der Regel folgend: Was sich bequem im Kopfe rechnen läßt, das soll auch nur im Kopf gelöst werden.

Das siebente Schuljahr.

Übersicht.

Hauptgliederung des Stoffes:

1. Gegenstand: Die allgemeinsten Verkehrsverhältnisse.
2. Gegenstand: Das Fabrikwesen und die Großindustrie.
3. Gegenstand: Das Wichtigste vom Handel.
4. Gegenstand: Das Wichtigste vom Staatshaushalt.

Rechtfertigung unserer Gliederung. Wenn wir vom Staatshaushalt erst zuletzt und als 4. Gegenstand handeln, so geschieht dies, weil wir uns von dem Grundsatze leiten lassen: Zuerst das Einfache, dann das Zusammengesetzte, zuerst das Leichtere, dann das Schwierigere. Aber auch die Reihenfolge der drei übrigen

Gegenstände ist keine willkürliche. Großindustrie und Handel haben unsere Verkehrseinrichtungen (Eisenbahnen, Postwesen 2c.) zur Voraussetzung. Und die Großindustrie liefert Gegenstände, Waren für den Handel. Was der Fabrikant produziert, das wird vom Kaufmann in die Welt hinausgeschickt und unter die Leute gebracht. Aus diesen Gründen muß auch in der Schule von den Verkehrsverhältnissen früher gesprochen werden als vom Fabrikwesen und Handel und von jenem (Fabrikwesen) wiederum früher als von letzterem (Handel).

Erster Gegenstand: Das Wichtigste von den Verkehrseinrichtungen.

Was hat die Volksschule von diesem Gegenstand durchzunehmen? Antwort: Das Wichtigste, Notwendigste. Aber, muß man weiter fragen, was ist denn hier das Wissenswürdigste, Wichtigste, Unentbehrlichste? Nach meinem Dafürhalten 1. die Beförderung der Passagiere, 2. jene von geschriebenen oder gedruckten Mitteilungen (Briefe, Postkarten, Zeitungen 2c.), 3. die Versendung von Gepäckstücken und Waren, 4. die Versendung von Geld. Das gibt für den Unterricht vier Stufen.

1. Stufe: Von der Beförderung der Passagiere.

1. Übung: Fahrpreise auf Eisenbahnen. — Billete für Post- und Kourierzüge I., II. und III. Klasse, Preis für je 1 Kilometer.

2. Übung: Fahrpreise bei Omnibussen, Stellwagen, Dampfschiffen 2c.

2. Stufe: Von der Beförderung von Mitteilungen.

1. Übung: Beförderung geschriebener oder gedruckter Mitteilungen durch die Post

a) unter Kouvert (Briefe, Briefporto),
b) unter Kreuzband (Zeitungen 2c.),
c) offen (Korrespondenzkarten).

2. Übung: Beförderung von Mitteilungen durch den Telegraphen (Telegramme, Taxe derselben).

3. Stufe: Von der Beförderung von Gepäckstücken und Waren.

1. Übung: Durch die Bahn, als Passagiergut, Berechnung der Fracht.

2. Übung: Durch die Bahn, als Frachtgut, Berechnung der Kosten, Ausfüllen von Frachtbriefen.

3. Übung: Durch die Bahn, als Eilgut, Berechnung und Ausfüllung von Frachtbriefen.

4. Übung: Durch die Post, Berechnung des Packetporto's.

4. Stufe: Von der Versendung des Geldes.

1. Übung: Geldbriefe, Freimachen derselben gegen Schein, Scheingebühren.

2. Übung: Versendung durch Postanweisung — Berechnung der Gebühren.

3. Übung: Erhebung von Geld mittelst Postnachnahme.

Zweiter Gegenstand: Das Wichtigste von der Großindustrie.

Was hat die Schule aus diesem Gebiete zu bringen? — Wiederum nur das Wichtigste und Notwendigste. — Der Schüler soll vor allem einen anschaulichen Begriff bekommen von dem Leben und Treiben in einer großen Fabrik, von der Art und Weise, wie dort die Arbeit unter den Arbeitern verteilt ist, von der Unmasse von Material, das hier Tag für Tag verbraucht wird u. s. w. — Deshalb wird unser Rechenbuch die eingehende Beschreibung irgend eines bedeutenden Etablissements, also etwa der Krupp'schen Gußstahlfabrik, enthalten müssen. Auch sollten Abbildungen von Fabrikräumen 2c. vorgezeigt werden. — Was nun den eigentlichen Rechenstoff anbelangt, so verteilt sich derselbe, wie folgt:

1. Übung: Berechnung der Löhne der Arbeiter, Aufseher, Ingenieure 2c.

2. Übung: Berechnung der Ausgaben für Rohmaterialien, Reparaturen 2c.

3. Übung: Berechnung der Fabrikationskosten, sowie der Preise, zu welchen die Fabrikate angeboten werden müssen, wenn so und so viel gewonnen werden soll.

4. Übung: Berechnung des Gewinnes oder Verlustes — Verteilung desselben auf die einzelnen Unternehmer (Aktionäre 2c.).

Dritter Gegenstand: Das Wichtigste vom Handel.

Das Rechenbuch gibt eine ausführliche Schilderung von dem Leben und Treiben in einer Großhandlung.

Daran reiht sich der eigentliche Übungsstoff und zwar sind jeder Stufe sachliche Belehrungen vorausgeschickt.

1. Stufe: Von der Bestellung und Versendung der Waren.

1. Übung: Berechnung der Unkosten für Verpackung, Fracht und Zoll.

2. Übung: Berechnung des Rabattes.

3. Übung: Berechnung der Gesamtkosten, vollständiger Ankaufspreis.

2. Stufe: Von der Bezahlung der Ware.

1. Übung: Umrechnung des ausländischen Geldes in inländisches.

2. Übung: Bezahlung durch Wechsel, Wechselrechnung.

3. Stufe: Von der Berechnung des Verkaufpreises, sowie des Gewinnes oder Verlustes bei einem abgeschlossenen Geschäfte und endlich des Gewinnanteiles der Compagnons.

1. Übung: Es wird berechnet, wie viel für die Ware beim Verkaufe verlangt werden muß, um die Ankaufskosten zu decken und überdies so und so viel zu gewinnen.

2. Übung: Berechnung des Gewinnes oder Verlustes bei einem abgeschlossenen Geschäfte.

3. Übung: Verteilung des Gewinnes auf die Compagnons.

Zum Schluß kann der Lehrer noch die Bücher, welche der Handelsmann führen muß, aufzählen und den Zweck und Inhalt eines jeden in Kürze beschreiben.

Vierter Gegenstand: Das Wichtigste vom Staatshaushalt.

Der Schüler soll kennen lernen,

1. welche Veranstaltungen der Staat getroffen hat

a) zur Wahrung des Eigentums und Lebens, sowie zur Aufrechthaltung der Ordnung (Grundbücher, in welchen die Grundstücke verzeichnet sind — Gerichtshöfe, Polizei 2c.),

b) zur Ermöglichung und Erleichterung des Verkehrs (Straßen, Brücken, Bahnen, Kanäle, Postämter, Telegraphenbureaux 2c.),

c) zur Unterstützung und Pflege kranker oder hilfsbedürftiger Leute (Pfründnereien, Krankenhäuser, Irrenanstalten 2c.),

d) zum Schutz und Gedeihen der Religiosität und zur Belehrung der Jugend (Pfarrämter, Schulen),

e) zur Abwehr des äußeren Feindes (Militär);

2. wie der Staat seine ungeheuren Ausgaben deckt

a) durch Einnahmen aus Staatseigentum (Förstereien 2c.),

b) durch Steuern und Zölle (Rentämter, Zollämter),

c) durch Aufnahme von Kapitalien (Papiergeld, Obligationen).

Darum muß unser dritter und letzter Gegenstand im Rechenbuche durch sachliche Belehrungen über die Institutionen des Staates, über die enormen Summen, welche von Jahr zu Jahr darauf verwendet werden müssen, sowie über die Art und Weise, wie der Staat seine Kapitalien auftreibt und zurückbezahlt, eingeleitet werden.

Der Übungsstoff selbst wird sich auf drei Stufen verteilen.

1. Stufe: Von den Ausgaben des Staates.

1. Übung: Von den Gesamtausgaben für die einzelnen Institutionen, z. B. für Militär, für Schulen.

2. Übung: Von den Gehältern und Pensionen der Offiziere, Beamten 2c.

2. Stufe: Von den Einnahmen des Staates.

1. Übung: Einnahmen aus Staatseigentum (Erträgnisse der Waldungen 2c.).

2. Übung: Einnahmen aus indirekten Steuern (Malzaufschlag 2c.).

3. Übung: Einnahmen aus direkten Steuern (Rentämter, die verschiedenen Arten von Steuern, wie Einkommensteuer, Grundsteuer, Kapitalrentensteuer 2c.).

4. Übung: Einnahmen aus Zöllen (Zollamt, Berechnung der Ein- und Ausfuhrzölle).

3. Stufe: Von den Staatsschulden oder der Aufnahme von Kapitalien zu Staatszwecken.

1. Übung: Von den Staatspapieren und Obligationen.

2. Übung: Von dem Kurs der Staatspapiere.

3. Übung: Von den Papieren ausländischer Staaten (Aktiengesellschaften 2c.) und ihrem Kurs (Belehrungen über Börse, Bankhäuser, Kurszettel). —

Anhang.

Verteilung des Rechenstoffes auf die einzelnen Klassen einer Landschule mit nur einem Lehrer.

Vorbereitungsklasse (1. Schuljahr): Bloßes Zählen.

I. Klasse (2. und 3. Schuljahr): Einmaleins.

II. Klasse (4. und 5. Schuljahr): Grundrechnungsarten und das Leichtere vom Bruchrechnen.

III. Klasse (6. und 7. Schuljahr): Gemeine und Dezimalbruchrechnung, Verhältnis- und Prozentrechnung.

Feiertagsschule: Haushaltungsrechnung.

Allgemeine deutsche Lehrerzeitung. — Als den kühnsten Revolutionär auf dem Gebiete des Rechenunterrichts muß man Rudolf Knilling ansehen. Derselbe hat bei Ackermann in München eine Schrift erscheinen lassen, in der er mit scharfgeschliffenen Waffen für eine „Reform des Rechenunterrichts in den Volksschulen" kämpft. Obgleich der Verfasser manchmal etwas wegwerfend über bedeutende Pädagogen urteilt, so kann man ihm doch nicht Prahlerei und Selbstüberschätzung à la Basedow vorwerfen, zumal man bei ihm keine Phrasen und Redensarten, sondern auf gründlichen Studien beruhende, nüchterne Auseinandersetzungen findet . . . Meyer Spanier.

Repertorium der Pädagogik. — Geistigen Genuß werden beim Hinabsteigen in den geöffneten Gedankenschacht selbst diejenigen empfinden, welche, wie z. B. der Unterzeichnete, den Anschauungen des Verf. nicht immer beizutreten vermögen. F. Mann.

Volksschule. — Wer seiner Sache so entschieden vertraut, verdient gehört zu werden, sei es, damit man ihn widerlege, oder, wenn man es nicht vermag, anerkenne.

Anzeiger für die neueste pädagogische Literatur. — So bietet das Buch doch viele interessante Erörterungen und ist wohl geeignet, manchen Wahn zu zerstören.

Deutscher Schulwart. — Schon die Art und Weise, der Freimut, mit welchem Knilling seinem Ziele zusteuert, machen das Schriftchen interessant. Denkende Methodiker müssen ihre Freude an ihm haben.

Kath. Zeitschrift für Erziehung und Unterricht. — Recensent kann die vorliegende Schrift jedem Lehrer zum Studium bestens empfehlen.

Literaturblatt für kath. Erzieher. — Das Buch verdient die höchste Beachtung, und wir wünschen, daß der schneidige Verfasser recht bald „die praktische Abteilung" folgen lasse.

Pädag. Zeitschrift. — Auf dem Gebiete des Volksschul-Rechenunterrichts herrscht ungleich weniger Klarheit als auf jenem anderer Unterrichtsgegenstände, und der Verf. des in seiner ersten Abteilung vorliegenden Werkes fühlt dies und ringt nun darnach, den dunklen Nebel zu teilen . . . Franz Stöckl.

Bayr. Lehrerzeitung. — Es sei hier nur erwähnt, daß Methodiker, welche sich für das hier abgehandelte Gebiet besonders interessieren, Gründlichkeit und vielseitige Betrachtung des Gegenstandes nicht vermissen werden . . .

Rheinisch-Westf. Schulzeitung. — Den Verfasser der Schrift „Zur Reform des Rechenunterrichtes" aber bitten wir, seine interessanten Forschungen fortsetzen und uns recht bald ein Urteil über das ganze Werk ermöglichen zu wollen . . .
J. Mundt, Kreisschulinspektor in Jülich.

Kgl. Hof-Buchdruckerei von E. Mühlthaler in München.

Knilling, Rudolf

Zur Reform des Rechenunterrichtes in den Volksschulen

Bd.: 2

1886